Exercice 1.

Soit $V = \{x_1, x_2, x_3\}$ un ensemble de variables propositionnelles et :

$$\varphi_1 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \qquad \varphi_2 = x_1 \Rightarrow (\neg(x_2 \texttt{ NAND } \overline{x_1}) \vee (x_1 \Leftrightarrow x_3)) \qquad \varphi_3 = x_1 \wedge \overline{x_1}$$

1. Écrire φ_1, φ_2 et φ_3 sous forme normale disjonctive canonique.
2. Écrire φ_1, φ_2 et φ_3 sous forme normale conjonctive canonique.

Exercice 2. Formules logiques en OCaml

Dans cet exercice, on fixe un entier $n \in \mathbb{N}$ et on note $V = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ l'ensemble des variables propositionnelles. Les formules seront représentées par le type `formule` et les distributions de vérité seront représentées par le type `distr` :

```
type formule =
  | V           (* Vrai *)
  | F           (* Faux *)
  | Var of int  (* x_i *)
  | Non of formule
  | Ou  of formule * formule
  | Et  of formule * formule;;
```

```
(* Un tableau de type distr est de taille n
 * et ne contient que des 0 et des 1 *)
type distr = int array;;
```

1. Définir un tableau de type « `formule array` » contenant les formules suivantes (il s'agit des formules de l'exercice 1 du TP 13) :

$$\psi_0 = x_2 \wedge \overline{x_1}, \qquad \psi_1 = \neg(x_1 \wedge x_2), \qquad \psi_2 = \overline{x_2} \vee (x_2 \wedge \overline{x_1}),$$
$$\psi_3 = (x_1 \vee x_2) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2}), \qquad \psi_4 = (\overline{x_1} \wedge x_2) \vee (x_0 \wedge \overline{x_2}).$$

2. (a) Écrire une fonction « `eval: distr -> formule -> int` » qui renvoie `0` ou `1` en fonction de l'évaluation de la formule donnée en entrée.
   (b) Quelle est la complexité de votre fonction ?
3. (a) Écrire une fonction « `sont_equiv: formule -> formule -> int -> bool` » qui renvoie `true` lorsque les deux formules en entrée sont équivalentes et `false` sinon. L'entier donné en entrée est n. On vérifiera en particulier que $\psi_0 \not\equiv \psi_3$ et $\psi_0 \not\equiv \psi_4$.
   (b) Quelle est la complexité de votre fonction ?
4. Écrire des fonctions

   « `est_tautologie: formule -> int -> bool` »,
   « `est_satisfiable: formule -> int -> bool` »
   « `est_antilogie: formule -> int -> bool` »

   qui indiquent si la formule donnée en entrée est une tautologie, satisfiable ou une antilogie.

Soient φ et $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ des formules. Substituer $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ par $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ dans φ consiste à remplacer chaque occurrence de x_i dans φ par φ_i. Par exemple avec $n = 4$ et :

$$\begin{aligned}
\varphi &= \neg(\overline{x_1} \wedge ((\overline{x_0} \wedge x_1) \vee \overline{x_2})) \\
\varphi_0 &= \overline{x_0} \\
\varphi_1 &= x_1 \wedge x_2 \\
\varphi_2 &= x_2 \vee x_3 \\
\varphi_3 &= \neg(x_1 \vee (x_2 \vee x_3))
\end{aligned}$$

On obtient :

$$S(\varphi) = \neg(\neg(x_1 \wedge x_2) \wedge ((\overline{\overline{x_0}} \wedge (x_1 \wedge x_2)) \vee \neg(x_2 \vee x_3)))$$

5. Écrire une fonction « `subs: formule array -> formule -> formule` » qui prend en entrée le tableau de taille n contenant les φ_i ainsi que φ, et qui renvoie $S(\varphi)$.
6. Montrer que si φ et ψ sont sémantiquement équivalentes alors $S(\varphi)$ et $S(\psi)$ le sont également.

Exercice 3.

Soit $n \geqslant 3$ un entier naturel et V un ensemble de n variables propositionnelles. Une 3-clause est une disjonction de trois littéraux issus de variables différentes.

1. Soit ψ une 3-clause quelconque. Quel est le nombre de distributions de vérité qui satisfont ψ ?
2. Soit φ une conjonction de 3-clauses. Montrer que si φ est une antilogie alors le nombre de 3-clauses dans φ est au moins 8.

Exercice 4. Construction d'une FND à partir d'une FNC

Soit $V = \{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$ un ensemble de variables propositionnelles. Comme nous allons le montrer dans cet exercice, le fait de tester si une forme normale disjonctive est satisfiable est un problème facile (il se résout en temps en temps linéaire). En revanche, tester si une forme normale conjonctive est satisfiable est un problème difficile (le résoudre en temps polynomial revient à montrer que $P = NP$). Dans la suite, étant donnée F une FNC, notre but est de construire F' une FND avec $F \equiv F'$.

Étude théorique

Dans cette partie, on considère :

- G une forme normale disjonctive. C'est à dire :

$$G = \bigvee_{i=1}^{a} \left(\bigwedge_{j=1}^{b_i} x_{i,j} \right),$$

  où $a, b_1, b_1, \ldots, b_a$ sont des entiers naturels et les $x_{i,j}$ sont des littéraux.
- y un littéral.
- D une clause disjonctive. C'est à dire :

$$D = \bigvee_{k=1}^{c} y_k,$$

  où c est un entier naturel et les y_k sont des littéraux.
- F une forme normale conjonctive. C'est à dire :

$$F = \bigwedge_{\ell=1}^{m} D_\ell,$$

  où m est un entier naturel et les D_i sont des clauses disjonctives.

1. Exprimer $y \wedge G$ sous forme normale disjonctive.
2. Exprimer $D \wedge G$ sous forme normale disjonctive.
3. On note $\phi(D, G)$ la forme normale disjonctive trouvée dans la question précédente. À l'aide de ϕ, exprimer F sous forme normale disjonctive.

Étant donnée une formule logique H, on note $|H|$ le nombre de littéraux (non nécessairement distincts) qui apparaissent dans H. Par exemple, avec les notations précédentes :

$$|G| = \sum_{i=1}^{a} b_i, \qquad |D| = c, \qquad |F| = \sum_{i=1}^{m} |D_i|.$$

4. Soit F' la forme normale disjonctive sémantiquement équivalente à F trouvée dans la question 3.
   (a) Exprimer $|F'|$ en fonction de m et des $|D_i|$.
   (b) Montrer que pour F bien choisi, on a $|F'| = \Theta\Big(|F| \times 3^{|F|/3}\Big)$.

Implémentation

En OCaml, on représente les formes normales conjonctives et disjonctives par les types suivants :

```
(* lit = litteral
 * conj = conjonction
 * disj = disjonction
 * fnd = formes normale disjonctive
 * fnc = formes normale conjonctive *)
type lit =
  | Var of int    (* v_i      *)
  | Neg of int;;  (* non(v_i) *)
type conj = lit list and disj = lit list;;
type fnd = conj list and fnc = disj list;;
```

5. Écrire une fonction « `fnc_to_fnd: fnc -> fnd` » qui prend en entrée une forme normale conjonctive, et renvoie une forme normale disjonctive sémantiquement équivalente. Testez votre fonction.
6. Écrire une fonction « `est_sat_fnd: fnd -> bool` » qui indique si la formule F donnée en entrée est satisfiable. Votre fonction devra s'exécuter en temps $\mathcal{O}(n+t)$ où $n = |V|$ et t est la taille de l'entrée. Testez votre fonction.
7. (a) En utilisant les fonctions précédentes, écrire une fonction « `est_sat_fnc: fnc -> bool` » qui indique si la formule donnée en entrée est satisfiable. Testez votre fonction.
   (b) Que dire du temps d'exécution de `est_sat_fnc` en fonction de la taille de l'entrée ?

Exercice 5. CCP 2017

Imaginez-vous ethnologue. Vous étudiez une peuplade primitive qui présente un comportement manichéen extrême : lorsque plusieurs personnes participent à une même conversation sur un sujet donné, elles vont toutes avoir le même comportement manichéen tant que la conversation reste sur le même sujet, c'est-à-dire que toutes les affirmations seront soit des vérités, soit des mensonges. Par contre, si le sujet de la conversation change, la nature des affirmations, soit mensonge, soit vérité, peut changer, mais toutes les affirmations seront de la même nature tant que le sujet ne changera pas à nouveau. Pour être autorisé à séjourner dans cette peuplade, vous devez respecter cette règle. Vous participez à une conversation avec trois de leurs membres que nous appellerons X, Y et Z. Ceux-ci vous indiquent comment rejoindre leur village. Si vous n'arrivez pas à le rejoindre, vous ne serez pas autorisé à y séjourner.
Le premier sujet abordé est la région dans laquelle se trouve le village :

> X indique : “Le village se trouve dans la vallée” ;
>
> Z réplique : “Non, il ne s'y trouve pas” ;
>
> X reprend : “Ou alors dans les collines”.

Nous noterons V et C les variables propositionnelles associées à la région dans laquelle se trouve le village. Nous noterons X_1 et Z_1 les formules propositionnelles correspondant aux affirmations de X et de Z sur le premier sujet.
Puis, le second sujet est abordé : le chemin qui permet de rejoindre le village dans la région concernée.

> X dit : “Le chemin de gauche conduit au village” ;
>
> Z répond : “Tu as raison” ;
>
> X complète : “Le chemin de droite y conduit aussi” ;
>
> Y affirme : “Si le chemin du milieu y conduit, alors celui de droite n'y conduit pas” ;
>
> Z indique : “Celui du milieu n'y conduit pas”.

Nous noterons G, M, D les variables propositionnelles correspondant respectivement au fait que le chemin de gauche, du milieu et de droite, conduit au village. Nous noterons X_2, Y_2 et Z_2 les formules propositionnelles correspondant aux affirmations de X, de Y et de Z sur le second sujet.

1. Représenter le comportement manichéen des interlocuteurs dans le premier sujet abordé sous la forme d'une formule du calcul des propositions dépendant des formules propositionnelles X_1 et Z_1.
2. Représenter les informations données par les participants sous la forme de deux formules du calcul des propositions X_1 et Z_1 dépendant des variables V et C.
3. En utilisant la résolution avec les propriétés des opérateurs booléens et les formules de De Morgan en calcul des propositions, déterminer dans quelle région vous devez vous rendre pour rejoindre le village.
4. Représenter le comportement manichéen des interlocuteurs dans le second sujet abordé sous la forme d'une formule du calcul des propositions dépendant des formules propositionnelles X_2, Y_2 et Z_2.
5. Représenter les informations données par les participants sous la forme de trois formules du calcul des propositions X_2, Y_2 et Z_2 dépendant des variables G, M et D.
6. En utilisant la résolution avec les tables de vérité en calcul des propositions, déterminer quel chemin vous devez suivre pour rejoindre le village.
7. En admettant que les trois participants aient menti, pouviez-vous prendre d'autres chemins ? Si oui, le ou lesquels ?