Exercice 1. Tables de vérité

1. Soient x_0, x_1 et x_2 trois variables propositionnelles. On définit :

$$\varphi_1 = x_2 \wedge \overline{x_1}, \qquad \varphi_2 = \neg(x_1 \wedge x_2), \qquad \varphi_3 = \overline{x_2} \vee (x_2 \wedge \overline{x_1}),$$
$$\varphi_4 = (x_1 \vee x_2) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2}), \qquad \varphi_5 = (\overline{x_1} \wedge x_2) \vee (x_0 \wedge \overline{x_2}).$$

   (a) Établir les tables de vérité de ces formules.

   (b) En déduire les deux formules qui sont sémantiquement équivalentes et trouver les 10 relations de la forme $\varphi_i \vDash \varphi_j$ avec $i \neq j$.

2. Vérifiez que : $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2 \equiv (\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) \wedge (\varphi_2 \Rightarrow \varphi_1)$ et $\varphi_1 \oplus \varphi_2 \equiv \neg(\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2)$

3. Exprimer sous la forme d'une équivalence sémantique ou d'une implication sémantique :

   (a) La symétrie de l'équivalence.

   (b) La transitivité de l'implication.

   Idem pour les techniques de démonstrations suivantes :

   (c) Le raisonnement par contraposition.

   (d) Le raisonnement par l'absurde.

4. φ_1 et φ_2 sont-elles des tautologies, des antilogies et/ou satisfiables ?

$$\varphi_1 = \Big[(x_2 \vee x_1) \Rightarrow (\neg(x_1 \wedge \overline{x_3}) \oplus x_2)\Big] \wedge \neg\Big[(x_2 \vee x_1) \Rightarrow (\neg(x_1 \wedge \overline{x_3}) \oplus x_2)\Big]$$
$$\varphi_2 = \Big[(x_2 \Leftrightarrow \overline{x_1}) \oplus \neg(x_1 \vee x_2 \vee x_3)\Big] \oplus \neg\Big[(x_2 \Leftrightarrow \overline{x_1}) \oplus \neg(x_1 \vee x_2 \vee x_3)\Big]$$

Exercice 2. Simplification de formules

1. Simplifier :

$$\varphi_1 = (x_1 \Rightarrow \overline{x_2}) \Rightarrow (x_1 \vee x_2)$$
$$\varphi_2 = (x_1 \vee (x_2 \Rightarrow x_3)) \Rightarrow (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$$
$$\varphi_3 = \Big[(x_1 \Rightarrow (\overline{x_1} \wedge x_2)) \wedge (x_2 \Rightarrow x_1) \wedge (x_2 \Rightarrow \overline{x_1})\Big] \vee \Big[x_1 \wedge x_2 \wedge (x_2 \Rightarrow x_1)\Big]$$

2. φ_1, φ_2 et φ_3 sont-elles des tautologies, des antilogies et/ou satisfiables ?

$$\varphi_1 = x_1 \Rightarrow (x_2 \Rightarrow x_1), \qquad \varphi_2 = x_1 \texttt{ NOR } (x_2 \texttt{ NOR } x_1), \qquad \varphi_3 = (x_2 \vee x_1) \wedge \neg(x_1 \vee x_2).$$

Exercice 3.

Soit $V = \{x_1, x_2, x_3\}$ un ensemble de variables propositionnelles et :

$$\varphi_1 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \qquad \varphi_2 = x_1 \Rightarrow (\neg(x_2 \texttt{ NAND } \overline{x_1}) \vee (x_1 \Leftrightarrow x_3)) \qquad \varphi_3 = x_1 \wedge \overline{x_1}$$

1. Écrire φ_1, φ_2 et φ_3 sous forme normale disjonctive canonique.
2. Écrire φ_1, φ_2 et φ_3 sous forme normale conjonctive canonique.

Exercice 4. Formules logiques en OCaml

Dans cet exercice, on fixe un entier $n \in \mathbb{N}$ et on note $V = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ l'ensemble des variables propositionnelles. Les formules seront représentées par le type `formule` et les distributions de vérité seront représentées par le type `distr` :

```
type formule =
  | V          (* Vrai *)
  | F          (* Faux *)
  | Var of int (* x_i *)
  | Non of formule
  | Ou  of formule * formule
  | Et  of formule * formule;;
```

```
(* Un tableau de type distr est de taille n
 * et ne contient que des 0 et des 1 *)
type distr = int array;;
```

1. Définir un tableau de type « `formule array` » contenant les formules suivantes (il s'agit des formules de l'exercice 1) :

$$\psi_0 = x_2 \wedge \overline{x_1}, \qquad \psi_1 = \neg(x_1 \wedge x_2), \qquad \psi_2 = \overline{x_2} \vee (x_2 \wedge \overline{x_1}),$$
$$\psi_3 = (x_1 \vee x_2) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2}), \qquad \psi_4 = (\overline{x_1} \wedge x_2) \vee (x_0 \wedge \overline{x_2}).$$

2. (a) Écrire une fonction « `eval: distr -> formule -> int` » qui renvoie `0` ou `1` en fonction de l'évaluation de la formule donnée en entrée.
   (b) Quelle est la complexité de votre fonction ?
3. (a) Écrire une fonction « `sont_equiv: formule -> formule -> int -> bool` » qui renvoie `true` lorsque les deux formules en entrée sont équivalentes et `false` sinon. L'entier donné en entrée est n. On vérifiera en particulier que $\psi_0 \not\equiv \psi_3$ et $\psi_0 \not\equiv \psi_4$.
   (b) Quelle est la complexité de votre fonction ?
4. Écrire des fonctions

« `est_tautologie: formule -> int -> bool` »,
« `est_satisfiable: formule -> int -> bool` »
« `est_antilogie: formule -> int -> bool` »

qui indiquent si la formule donnée en entrée est une tautologie, satisfiable ou une antilogie.

Soient φ et $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ des formules. Substituer $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ par $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ dans φ consiste à remplacer chaque occurrence de x_i dans φ par φ_i. Par exemple avec $n = 4$ et :

$$\begin{aligned}
\varphi &= \neg(\overline{x_1} \wedge ((\overline{x_0} \wedge x_1) \vee \overline{x_2})) \\
\varphi_0 &= \overline{x_0} \\
\varphi_1 &= x_1 \wedge x_2 \\
\varphi_2 &= x_2 \vee x_3 \\
\varphi_3 &= \neg(x_1 \vee (x_2 \vee x_3))
\end{aligned}$$

On obtient :

$$S(\varphi) = \neg(\neg(x_1 \wedge x_2) \wedge ((\overline{\overline{x_0}} \wedge (x_1 \wedge x_2)) \vee \neg(x_2 \vee x_3)))$$

5. Écrire une fonction « `subs: formule array -> formule -> formule` » qui prend en entrée le tableau de taille n contenant les φ_i ainsi que φ, et qui renvoie $S(\varphi)$.
6. Montrer que si φ et ψ sont sémantiquement équivalentes alors $S(\varphi)$ et $S(\psi)$ le sont également.

Exercice 5. Sujet CCP 2012

Vous participez à un concours de mathématiques comportant une partie de raisonnement logique. Plusieurs orateurs font des déclarations et vous devez répondre à des questions en vous appuyant sur des informations déduites de ces déclarations. La règle suivante s'applique : « Les orateurs sont de trois natures : les véridiques, les menteurs et les changeants. Les véridiques disent toujours la vérité, les menteurs mentent toujours, et les changeants disent en alternance une vérité et un mensonge (c'est-à-dire, soit une vérité, puis un mensonge, puis une vérité, etc. ; soit un mensonge, puis une vérité, puis un mensonge, etc.). Pendant tout le concours, les orateurs ne peuvent pas changer de nature.» Les épreuves comportent deux phases :

- Les différents orateurs font plusieurs déclarations dont l'analyse permet de déterminer la nature de chaque orateur (véridique, menteur, changeant commençant par dire la vérité, ou changeant commençant par dire un mensonge).
- Les orateurs font une seconde série de déclarations. Puis, vous devez répondre à des questions en exploitant les informations contenues dans ces déclarations.

1. Dans la première phase, quel est le nombre minimum de déclarations que doit faire chaque orateur pour qu'il soit possible de déterminer sa nature ? Justifier votre réponse.
2. Soit un orateur A qui fait une suite de n déclarations A_i. Proposer des formules du calcul des propositions A_V , A_M, A_{CV} et A_{CM} qui permettent de caractériser la nature de A (respectivement véridique, menteur, changeant commençant par dire la vérité, ou changeant commençant par dire un mensonge).

Vous participez à une première épreuve avec un orateur A qui fait les déclarations suivantes :

- J'aime le rouge mais pas le bleu.
- Soit j'aime le rouge, soit j'aime le vert.
- Si j'aime le rouge et le vert, alors j'aime le bleu.

Nous noterons R, V et B les variables propositionnelles associées au fait que l'orateur aime le rouge, le vert ou le bleu. Nous noterons A_1, A_2 et A_3 les formules propositionnelles associées aux déclarations de A.

3. Représenter les déclarations de l'orateur sous la forme de formules du calcul des propositions A_1, A_2 et A_3 dépendant des variables R, V et B.
4. Appliquer les formules permettant de caractériser la nature des orateurs A_V , A_M, A_{CV} et A_{CM} que vous avez proposées pour la question 2 pour l'orateur A dépendant des variables A_1, A_2 et A_3.
5. En utilisant le calcul des propositions (résolution avec les tables de vérité), déterminer la nature de l'orateur A. Quelles sont les couleurs qu'aime A ?

Vous participez à une seconde épreuve avec trois orateurs G, H et I. Vous avez déterminé dans la première phase avec succès que G est un menteur, que H est un véridique et que I est un changeant sans savoir s'il doit dire la vérité ou un mensonge pour sa déclaration suivante. Ceux-ci font les déclarations :

I : Le losange est visible.

G : Le cercle n'est visible que si le losange est visible.

I : Le triangle n'est pas visible.

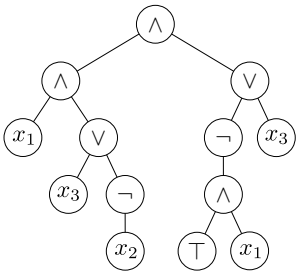
H : Soit le cercle est visible, soit le triangle est visible.

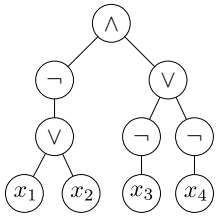
Nous noterons G_1, H_1, I_1 et I_2 les formules propositionnelles associées aux déclarations des orateurs G, H et I dans cette première épreuve. Nous noterons C, L et T les variables propositionnelles associées au fait que le cercle, le losange ou le triangle soit visible.

6. Représenter les déclarations des orateurs sous la forme de formules du calcul des propositions G_1, H_1, I_1 et I_2 dépendant des variables C, L et T.
7. Représenter les informations sur la nature des orateurs sous la forme d'une formule du calcul des propositions dépendant des variables G_1, H_1, I_1 et I_2.
8. En utilisant le calcul des propositions (résolution avec les formules de De Morgan), déterminer quelle est (ou quelles sont) la (ou les) figure(s) visible(s) ainsi que la nature exacte de I l'orateur changeant.

Exercice 6. Écritures arborescente et parenthésée

Dans cet exercice, on note $V = \{x_1, x_2, \ldots\}$ un ensemble de variables propositionnelles.

$A_0 =$ 

$A_1 =$ 

Soit A un arbre représentant une formule logique écrite avec les connecteurs $\neg$, $\wedge$ et $\vee$. On note F_A la formule logique correspondant à A écrite avec des parenthèses. En d'autres termes, F_A est définie par induction :

- Si A est réduit à une feuille étiquetée par $x \in \{\top, \bot\} \cup V$ alors $F_A = x$.
- Si la racine de A est étiquetée par $\neg$ et que A' est le sous-arbre de A alors $F_A = \neg F_{A'}$.
- Si la racine de A est étiquetée par $\wedge$ et que G et D sont les sous-arbres de A alors $F_A = (F_G \wedge F_D)$.
- Si la racine de A est étiquetée par $\vee$ et que G et D sont les sous-arbres de A alors $F_A = (F_G \vee F_D)$.

Par exemple, pour l'arbre A_0, on obtient $F_{A_0} = ((x_1 \wedge (x_3 \vee \overline{x_2})) \wedge (\neg(\top \wedge x_1) \vee x_3))$.

1. Donner l'écriture parenthésée correspondant à l'arbre A_1.
2. Donner les arbres représentant les formules $(x_1 \wedge (\overline{x_2} \vee x_3))$ et $\neg(x_1 \wedge (x_2 \vee \overline{x_3}))$.

Soit $\Sigma = \{(,), \wedge, \neg, \vee, \top, \bot\} \cup V$. L'ensemble Σ est appelé un ***alphabet***, ses éléments sont appelés des ***lettres*** et une suite finie de lettres est appelée un ***mot***. Soit u un mot, on note $|u|$ le nombre de lettres dans u. Par exemple : $|\neg(x_1 \wedge x_2)| = 6$ et $|F_{A_0}| = 23$.

Pour tout arbre A, on note $b(A)$ le nombre de noeuds étiquetés par un connecteur binaire ($\wedge$ ou $\vee$) et $n(A)$ le nombre de noeuds étiquetés par une négation ($\neg$).

3. (a) Exprimer $|F_A|$ en fonction de $b(A)$ et $n(A)$.
   (b) Prouver votre formule.

Exercice 7.

Soit $n \geqslant 3$ un entier naturel et V un ensemble de n variables propositionnelles. Une 3-clause est une disjonction de trois littéraux issus de variables différentes.

1. Soit ψ une 3-clause quelconque. Quel est le nombre de distributions de vérité qui satisfont ψ ?
2. Soit φ une conjonction de 3-clauses. Montrer que si φ est une antilogie alors le nombre de 3-clauses dans φ est au moins 8.