Porposition (à ajouter dans le cours) Pour toute distribution de vérité μ et toutes formules logiques $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$:

$$E_\mu\Big(\varphi_1 \oplus \varphi_2 \oplus \dots \oplus \varphi_n\Big) = \Big(E_\mu(\varphi_1) + E_\mu(\varphi_2) + \dots + E_\mu(\varphi_n)\Big)\%2$$

Démonstration. Récurrence immédiate sur $n \in \mathbb{N}^*$. □

Exercice 1. Tables de vérité

1. Soient x_0, x_1 et x_2 trois variables propositionnelles. On définit :

$$\varphi_1 = x_2 \wedge \overline{x_1}, \qquad \varphi_2 = \neg(x_1 \wedge x_2), \qquad \varphi_3 = \overline{x_2} \vee (x_2 \wedge \overline{x_1}),$$
$$\varphi_4 = (x_1 \vee x_2) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2}), \qquad \varphi_5 = (\overline{x_1} \wedge x_2) \vee (x_0 \wedge \overline{x_2}).$$

   (a) Établir les tables de vérité de ces formules.
   (b) En déduire les deux formules qui sont sémantiquement équivalentes et trouver les 10 relations de la forme $\varphi_i \vDash \varphi_j$ avec $i \neq j$.

2. Vérifiez que : $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2 \equiv (\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) \wedge (\varphi_2 \Rightarrow \varphi_1)$ et $\varphi_1 \oplus \varphi_2 \equiv \neg(\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2)$

3. Exprimer sous la forme d'une équivalence sémantique ou d'une implication sémantique :
   (a) La symétrie de l'équivalence.
   (b) La transitivité de l'implication.

   Idem pour les techniques de démonstrations suivantes :
   (c) Le raisonnement par contraposition.
   (d) Le raisonnement par l'absurde.

4. φ_1 et φ_2 sont-elles des tautologies, des antilogies et/ou satisfiables ?

$$\varphi_1 = \Big[(x_2 \vee x_1) \Rightarrow (\neg(x_1 \wedge \overline{x_3}) \oplus x_2)\Big] \wedge \neg\Big[(x_2 \vee x_1) \Rightarrow (\neg(x_1 \wedge \overline{x_3}) \oplus x_2)\Big]$$
$$\varphi_2 = \Big[(x_2 \Leftrightarrow \overline{x_1}) \oplus \neg(x_1 \vee x_2 \vee x_3)\Big] \oplus \neg\Big[x_2 \Leftrightarrow \overline{x_1}) \oplus \neg(x_1 \vee x_2 \vee x_3)\Big]$$

Exercice 2. Simplification de formules

1. Simplifier :

$$\varphi_1 = (x_1 \vee (x_2 \Rightarrow x_3)) \Rightarrow (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \qquad \varphi_2 = (x_1 \Rightarrow \overline{x_2}) \Rightarrow (x_1 \vee x_2)$$
$$\varphi_3 = \Big[(x_1 \Rightarrow (\overline{x_1} \wedge x_2)) \wedge (x_2 \Rightarrow x_1) \wedge (x_2 \Rightarrow \overline{x_1})\Big] \vee \Big[x_1 \wedge x_2 \wedge (x_2 \Rightarrow x_1)\Big]$$

2. φ_1, φ_2 et φ_3 sont-elles des tautologies, des antilogies et/ou satisfiables ?

$$\varphi_1 = x_1 \Rightarrow (x_2 \Rightarrow x_1), \qquad \varphi_2 = x_1 \texttt{ NOR } (x_2 \texttt{ NOR } x_1), \qquad \varphi_3 = (x_2 \vee x_1) \wedge \neg(x_1 \vee x_2).$$

Exercice 3. Sujet CCP 2012

Vous participez à un concours de mathématiques comportant une partie de raisonnement logique. Plusieurs orateurs font des déclarations et vous devez répondre à des questions en vous appuyant sur des informations déduites de ces déclarations. La règle suivante s'applique : « Les orateurs sont de trois natures : les véridiques, les menteurs et les changeants. Les véridiques disent toujours la vérité, les menteurs mentent toujours, et les changeants disent en alternance une vérité et un mensonge (c'est-à-dire, soit une vérité, puis un mensonge, puis une vérité, etc. ; soit un mensonge, puis une vérité, puis un mensonge, etc.). Pendant tout le concours, les orateurs ne peuvent pas changer de nature.» Les épreuves comportent deux phases :

- Les différents orateurs font plusieurs déclarations dont l'analyse permet de déterminer la nature de chaque orateur (véridique, menteur, changeant commençant par dire la vérité, ou changeant commençant par dire un mensonge).
- Les orateurs font une seconde série de déclarations. Puis, vous devez répondre à des questions en exploitant les informations contenues dans ces déclarations.

1. Dans la première phase, quel est le nombre minimum de déclarations que doit faire chaque orateur pour qu'il soit possible de déterminer sa nature ? Justifier votre réponse.
2. Soit un orateur A qui fait une suite de n déclarations A_i. Proposer des formules du calcul des propositions A_V , A_M, A_{CV} et A_{CM} qui permettent de caractériser la nature de A (respectivement véridique, menteur, changeant commençant par dire la vérité, ou changeant commençant par dire un mensonge).

Vous participez à une première épreuve avec un orateur A qui fait les déclarations suivantes :

- J'aime le rouge mais pas le bleu.
- Soit j'aime le rouge, soit j'aime le vert.
- Si j'aime le rouge et le vert, alors j'aime le bleu.

Nous noterons R, V et B les variables propositionnelles associées au fait que l'orateur aime le rouge, le vert ou le bleu. Nous noterons A_1, A_2 et A_3 les formules propositionnelles associées aux déclarations de A.

3. Représenter les déclarations de l'orateur sous la forme de formules du calcul des propositions A_1, A_2 et A_3 dépendant des variables R, V et B.
4. Appliquer les formules permettant de caractériser la nature des orateurs A_V , A_M, A_{CV} et A_{CM} que vous avez proposées pour la question 2 pour l'orateur A dépendant des variables A_1, A_2 et A_3.
5. En utilisant le calcul des propositions (résolution avec les tables de vérité), déterminer la nature de l'orateur A. Quelles sont les couleurs qu'aime A ?

Vous participez à une seconde épreuve avec trois orateurs G, H et I. Vous avez déterminé dans la première phase avec succès que G est un menteur, que H est un véridique et que I est un changeant sans savoir s'il doit dire la vérité ou un mensonge pour sa déclaration suivante. Ceux-ci font les déclarations :

I : Le losange est visible.

G : Le cercle n'est visible que si le losange est visible.

I : Le triangle n'est pas visible.

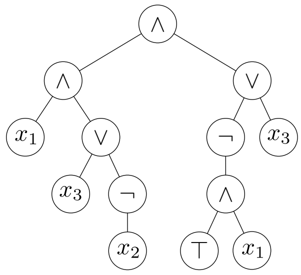
H : Soit le cercle est visible, soit le triangle est visible.

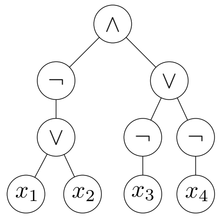
Nous noterons G_1, H_1, I_1 et I_2 les formules propositionnelles associées aux déclarations des orateurs G, H et I dans cette première épreuve. Nous noterons C, L et T les variables propositionnelles associées au fait que le cercle, le losange ou le triangle soit visible.

6. Représenter les déclarations des orateurs sous la forme de formules du calcul des propositions G_1, H_1, I_1 et I_2 dépendant des variables C, L et T.
7. Représenter les informations sur la nature des orateurs sous la forme d'une formule du calcul des propositions dépendant des variables G_1, H_1, I_1 et I_2.
8. En utilisant le calcul des propositions (résolution avec les formules de De Morgan), déterminer quelle est (ou quelles sont) la (ou les) figure(s) visible(s) ainsi que la nature exacte de I l'orateur changeant.

Exercice 4. Écritures arborescente et parenthésée

Dans cet exercice, on note $V = \{x_1, x_2, \ldots\}$ un ensemble de variables propositionnelles.

$A_0 =$ 

$A_1 =$ 

Soit A un arbre représentant une formule logique écrite avec les connecteurs $\neg$, $\wedge$ et $\vee$. On note F_A la formule logique correspondant à A écrite avec des parenthèses. En d'autres termes, F_A est définie par induction :

- Si A est réduit à une feuille étiquetée par $x \in \{\top, \bot\} \cup V$ alors $F_A = x$.
- Si la racine de A est étiquetée par $\neg$ et que A' est le sous-arbre de A alors $F_A = \neg F_{A'}$.
- Si la racine de A est étiquetée par $\wedge$ et que G et D sont les sous-arbres de A alors $F_A = (F_G \wedge F_D)$.
- Si la racine de A est étiquetée par $\vee$ et que G et D sont les sous-arbres de A alors $F_A = (F_G \vee F_D)$.

Par exemple, pour l'arbre A_0, on obtient $F_{A_0} = ((x_1 \wedge (x_3 \vee \overline{x_2})) \wedge (\neg(\top \wedge x_1) \vee x_3))$.

1. Donner l'écriture parenthésée correspondant à l'arbre A_1.
2. Donner les arbres représentant les formules $(x_1 \wedge (\overline{x_2} \vee x_3))$ et $\neg(x_1 \wedge (x_2 \vee \overline{x_3}))$.

Soit $\Sigma = \{(,), \wedge, \neg, \vee, \top, \bot\} \cup V$. L'ensemble Σ est appelé un ***alphabet***, ses éléments sont appelés des ***lettres*** et une suite finie de lettres est appelée un ***mot***. Soit u un mot, on note $|u|$ le nombre de lettres dans u. Par exemple : $|\neg(x_1 \wedge x_2)| = 6$ et $|F_{A_0}| = 23$.

Pour tout arbre A, on note $b(A)$ le nombre de noeuds étiquetés par un connecteur binaire ($\wedge$ ou $\vee$) et $n(A)$ le nombre de noeuds étiquetés par une négation ($\neg$).

3. (a) Exprimer $|F_A|$ en fonction de $b(A)$ et $n(A)$.
   (b) Prouver votre formule.

Exercice 5. Logique tri-valuée (CCP 2017)

A	B	$A \wedge B$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	?	?
$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	?	$\bot$
?	$\top$	?
?	$\bot$	$\bot$
?	?	?

A	B	$A \vee B$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\top$	?	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	?	?
?	$\top$	$\top$
?	$\bot$	?
?	?	?

A	B	$A \Rightarrow B$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	?	?
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	?	$\top$
?	$\top$	$\top$
?	$\bot$	?
?	?	$\top$

A	$\neg A$
$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$
?	?

Nous nous intéressons dans cet exercice à l'étude de quelques propriétés de la logique propositionnelle tri-valuée. En plus des deux valeurs classiques VRAI ($\top$) et FAUX ($\bot$) que peut prendre une expression, la logique propositionnelle tri-valuée introduit une troisième valeur INDETERMINE (?). $\mathcal{V}$ est l'ensemble des variables propositionnelles et $\mathcal{F}$ l'ensemble des formules construites sur $\mathcal{V}$. Pour $A, B \in \mathcal{V}$, les tables de vérité des opérateurs classiques dans cette logique propositionnelle sont données ci-dessus.

Définition 1 (Tri-valuation)**.** Une tri-valutation est une fonction $f : \mathcal{V} \to \{\top, \bot, ?\}$.

On étend alors de manière usuelle la notion de tri-valuation sur l'ensemble des formules :

Définition 2. Une tri-valuation sur l'ensemble des formules est une fonction $\hat{f} : \mathcal{F} \to \{\top, \bot, ?\}$.

Définition 3. Une tri-valuation $\hat{f}$ satisfait une formule ϕ si $\hat{f}(\phi) = \top$. On notera alors $\hat{f} \vdash_3 \phi$.

Définition 4 (Formule)**.** Une formule ϕ est :

- Une conséquence d'un ensemble de formules $\mathcal{X}$ si toute interprétation qui satisfait toutes les formules de $\mathcal{X}$ satisfait ϕ. On notera dans ce cas $\mathcal{X} \Vdash_3 \phi$.
- Une tautologie si pour toute tri-valuation $\hat{f}$, $\hat{f}(\phi) = \top$. On notera dans ce cas $\Vdash_3 \phi$.

1. Montrer que $A \vee \neg A$ n'est pas une tautologie.
2. Proposer alors une tautologie simple dans cette logique.

Posons $\top = 1$, $\bot = 0$ et $? = 0.5$.

3. Proposer un calcul simple permettant de trouver la table de vérité de $A \wedge B$ en fonction de A et B. Même question pour $A \vee B$.
4. En logique bi-valuée classique, les propositions $\neg A \vee B$ et $A \Rightarrow B$ sont équivalentes. Qu'en est-il dans le cadre de la logique propositionnelle tri-valuée ?
5. En écrivant les tables de vérité, indiquer si les propositions $\neg B \Rightarrow \neg A$ et $A \Rightarrow B$ sont équivalentes.
6. Donner la table de vérité de la proposition $((A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$. Cette proposition est-elle une tautologie ?

Un nouvel opérateur d'implication, noté $\to$, est alors défini, dont la table de vérité est donnée ci-contre.

A	B	$A \to B$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	?	?
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	?	$\top$
?	$\top$	$\top$
?	$\bot$	?
?	?	?

7. $A \to A$ est-elle une tautologie ?
8. Montrer qu'il n'existe aucune tautologie en utilisant uniquement cette définition de l'implication.
9. La proposition suivante est-elle une tautologie :

$$\text{“}(\{A\} \Vdash_3 B) \text{ est équivalente à } (\Vdash_3 A \to B)\text{”}\ ?$$

On définit alors le type `formuleLogique` représentant les formules de la manière suivante :

```
type formuleLogique =
  | Vrai (* Constante Vrai *)
  | Faux (* Constante Faux *)
  | Indetermine (* Constante Indéterminé *)
  | Var of string (* Variable propositionnelle *)
  | Non of formuleLogique (* Négation d'une formule *)
  | Et of formuleLogique*formuleLogique (* conjonction de deux formules *)
  | Ou of formuleLogique*formuleLogique (* disjonction de deux formules *)
  | Implique of formuleLogique*formuleLogique;; (* implication *)
```

10. Avec la représentation précédente, écrire en CaML la formule $((A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$
11. Écrire alors une fonction récursive CaML `lectureFormule`, prenant en argument une formule et renvoyant une chaîne de caractères spécifiant comment un lecteur lirait la formule. Ainsi, par exemple, pour $\phi = A \wedge \neg B$, `(lectureFormule $\phi $)` renvoie `A et non B`.