Exercice 1. Tables de vérité

Question 1.a – Si nécessaire, on peut ajouter des étapes intermédiaires dans les tableaux.

x_1	x_2	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
0	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	1	0	0	0	0

x_0	x_1	x_2	φ_5
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Question 1.b – On a :
$\varphi_1 \vDash \varphi_2$, $\varphi_1 \vDash \varphi_3$, $\varphi_1 \vDash \varphi_4$,
$\varphi_4 \vDash \varphi_2$, $\varphi_4 \vDash \varphi_3$
$\varphi_2 \equiv \varphi_3$ donc $\varphi_2 \vDash \varphi_3$, $\varphi_3 \vDash \varphi_2$
$\varphi_1 \vDash \varphi_5$, $\varphi_5 \vDash \varphi_2$, $\varphi_5 \vDash \varphi_3$

Question 2 – On établit les tables de vérité de ces deux formules :

φ_1	φ_2	$(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) \wedge (\varphi_2 \Rightarrow \varphi_1)$	$\neg(\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2)$
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

D'où les deux équivalences sémantiques.

Question 3.a – Pour toutes formules logiques φ_1 et φ_2 :

$$\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2 \equiv \varphi_2 \Leftrightarrow \varphi_1$$

Question 3.b – Pour toutes formules logiques φ_1, φ_2 et φ_3 :

$$(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) \wedge (\varphi_2 \Rightarrow \varphi_3) \vDash \varphi_1 \Rightarrow \varphi_3$$

Question 3.c – Pour toutes formules logiques φ_1 et φ_2 :

$$\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2 \equiv \overline{\varphi_2} \Rightarrow \overline{\varphi_1}$$

Question 3.d – Pour toute formule logique φ :

$$\overline{\varphi} \Rightarrow \bot \equiv \varphi$$

Question 4 –

⋆ Pour φ_1, on pose :

$$\psi_1 = (x_2 \vee x_1) \Rightarrow (\neg(x_1 \wedge \overline{x_3}) \oplus x_2)$$

alors $\varphi_1 = \psi_1 \wedge \neg\psi_1$. Soit μ une distribution de vérité. Si $E_\mu(\psi_1) = 1$ alors $E_\mu(\neg\psi_1) = 0$ donc $E_\mu(\varphi_1) = 0$. Sinon, $E_\mu(\psi_1) = 0$ donc $E_\mu(\neg\psi_1) = 1$ et $E_\mu(\varphi_1) = 0$ également. Donc φ_1 est une antilogie.

⋆ Pour φ_2, on pose :

$$\psi_2 = (x_2 \Leftrightarrow \overline{x_1}) \oplus \neg(x_1 \vee x_2 \vee x_3)$$

alors $\varphi_2 = \psi_2 \oplus \neg\psi_2$ Soit μ une distribution de vérité. Si $E_\mu(\psi_2) = 1$ alors $E_\mu(\neg\psi_2) = 0$ donc $E_\mu(\varphi_2) = 1$. Sinon $E_\mu(\psi_2) = 0$ donc $E_\mu(\neg\psi_2) = 1$ et $E_\mu(\varphi_2) = 1$ également. Donc φ_2 est satisfiable et est une tautologie.

Exercice 2. Simplification de formules

Question 1 – On a :

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= (x_1 \Rightarrow \overline{x_2}) \Rightarrow (x_1 \vee x_2)\\
&\equiv \neg(\overline{x_1} \vee \overline{x_2}) \vee (x_1 \vee x_2)\\
&\equiv (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \vee x_2)\\
&\equiv (x_1 \vee x_1 \vee x_2) \wedge (x_2 \vee x_1 \vee x_2)\\
&\equiv (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_2)\\
&\equiv x_1 \vee x_2
\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}
\varphi_2 &= (x_1 \vee (x_2 \Rightarrow x_3)) \Rightarrow (x_1 \vee x_2 \vee x_3)\\
&\equiv \neg(x_1 \vee (\overline{x_2} \vee x_3)) \vee (x_1 \vee x_2 \vee x_3)\\
&\equiv (\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge \overline{x_3}) \vee (x_1 \vee x_2 \vee x_3)\\
&\equiv (\overline{x_1} \vee x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x_3} \vee x_1 \vee x_2 \vee x_3)\\
&\equiv \top \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge \top\\
&\equiv x_1 \vee x_2 \vee x_3
\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}
\varphi_3 &= \Big[(x_1 \Rightarrow (\overline{x_1} \wedge x_2)) \wedge (x_2 \Rightarrow x_1) \wedge (x_2 \Rightarrow \overline{x_1})\Big] \vee \Big[x_1 \wedge x_2 \wedge (x_2 \Rightarrow x_1)\Big]\\
&\equiv \Big[(\overline{x_1} \vee (\overline{x_1} \wedge x_2)) \wedge (\overline{x_2} \vee x_1) \wedge (\overline{x_2} \vee \overline{x_1})\Big] \vee \Big[x_1 \wedge x_2 \wedge (\overline{x_2} \vee x_1)\Big]\\
&\equiv \Big[(\overline{x_1} \wedge (\overline{x_2} \vee x_1)) \wedge (\overline{x_2} \vee \overline{x_1})\Big] \vee \Big[(x_1 \wedge (\overline{x_2} \vee x_1)) \wedge x_2\Big]\\
&\equiv \Big[(\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}) \wedge (\overline{x_2} \vee \overline{x_1})\Big] \vee \Big[x_1 \wedge x_2\Big]\\
&\equiv \Big[\overline{x_1} \wedge (\overline{x_2} \wedge (\overline{x_2} \vee \overline{x_1}))\Big] \vee \Big[x_1 \wedge x_2\Big]\\
&\equiv (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}) \vee (x_1 \wedge x_2)
\end{aligned}$$

Question 2 –

⋆ Pour φ_1, on a :

$$\varphi_1 = x_1 \Rightarrow (x_2 \Rightarrow x_1) \equiv \overline{x_1} \vee (\overline{x_2} \vee x_1) \equiv \top \vee \overline{x_2} \equiv \top$$

Donc pour toute distribution de vérité μ :

$$E_\mu(\varphi_1) = E_\mu(\top) = 1$$

Donc φ_1 est satisfiable et est une tautologie.

⋆ Pour φ_2, on a :

$$\begin{aligned}\varphi_2 &= x_1 \texttt{ NOR } (x_2 \texttt{ NOR } x_1)\\ &\equiv \neg(x_1 \vee \neg(x_2 \vee x_1))\\ &\equiv \overline{x_1} \wedge (x_2 \vee x_1)\\ &\equiv \overline{x_1} \wedge x_2\end{aligned}$$

Donc φ_2 est satisfiable mais n'est pas une tautologie, en effet :

- Soit $\mu : \begin{cases} x_1 \mapsto 0 \\ x_2 \mapsto 1 \end{cases}$ alors $E_\mu(\varphi_2) = E_\mu(\overline{x_1} \wedge x_2) = 1$. Donc φ_2 est satisfiable et n'est pas une antilogie.
- Soit $\mu : \begin{cases} x_1 \mapsto 1 \\ x_2 \mapsto 1 \end{cases}$ alors $E_\mu(\varphi_2) = E_\mu(\overline{x_1} \wedge x_2) = 0$. Donc φ_2 n'est pas une tautologie.

⋆ Pour φ_3, on a :

$$\begin{aligned}\varphi_3 &= (x_2 \vee x_1) \wedge \neg(x_1 \vee x_2)\\ &\equiv (x_2 \vee x_1) \wedge (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2})\\ &\equiv ((x_2 \vee x_1) \wedge \overline{x_1}) \wedge \overline{x_2}\\ &\equiv (\overline{x_1} \wedge x_2) \wedge \overline{x_2}\\ &\equiv \overline{x_1} \wedge \bot\\ &\equiv \bot\end{aligned}$$

Donc φ_3 est une antilogie.

Exercice 3.

On commence par simplifier la formule φ_2 :

$$\begin{aligned}\varphi_2 &= x_1 \Rightarrow (\neg(x_2 \texttt{ NAND } \overline{x_1}) \vee (x_1 \Leftrightarrow x_3))\\ &\equiv \overline{x_1} \vee (\neg\neg(x_2 \wedge \overline{x_1}) \vee (x_1 \wedge x_3) \vee (\overline{x_1} \wedge \overline{x_3}))\\ &\equiv \overline{x_1} \vee (x_2 \wedge \overline{x_1}) \vee (x_1 \wedge x_3) \vee (\overline{x_1} \wedge \overline{x_3})\\ &\equiv \overline{x_1} \vee (x_1 \wedge x_3)\\ &\equiv \overline{x_1} \vee x_3.\end{aligned}$$

On peut maintenant établir les tables de vérité de ces formules :

x_1	x_2	x_3	φ_1	φ_2	φ_3
0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	0

Question 1 – Voici les formes normales disjonctives canoniques :

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &\equiv (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_3) \vee (\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge \overline{x_3}) \vee (x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3}) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \\
\varphi_2 &\equiv (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3}) \vee (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_3) \vee (\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge \overline{x_3}) \vee (\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge x_3) \\
&\qquad \vee (x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \\
\varphi_3 &\equiv \bot
\end{aligned}$$

Notez que pour φ_3, on a pris la convention que $\bot$ est une disjonction vide, donc c'est bien une forme normale disjonctive (avec 0 clause).

Question 2 – Voici les formes normales conjonctives canoniques :

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &\equiv (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3) \\
\varphi_2 &\equiv (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3) \\
\varphi_3 &\equiv (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3) \\
&\qquad \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3)
\end{aligned}$$

Exercice 4. Formules logiques en OCaml

Question 1 –

```
let tab_formules = [|
    Et (Var 2, Non (Var 1));
    Non (Et (Var 1, Var 2));
    Ou (Non (Var 2), Et (Var 2, Non (Var 1)));
    Et (Ou (Var 1, Var 2), Ou (Non (Var 1), Non (Var 2)));
    Ou (Et (Non (Var 1), Var 2), Et (Var 0, Non (Var 2)))
  |];;
```

Question 2.a –

```
let rec eval d f = match f with
  | V -> 1
  | F -> 0
  | Var i -> d.(i)
  | Non f -> 1 - eval d f
  | Ou (f1, f2) -> max (eval d f1) (eval d f2)
  | Et (f1, f2) -> min (eval d f1) (eval d f2);;
```

Question 2.b –

Solution 1. L'arbre des appels récursifs a la même forme que l'arbre donné en entrée (en particulier il a le même nombre de noeuds). Sans compter les appels récursifs, chaque appel à `eval` s'exécute en temps constant. Finalement :

$$\boxed{\text{Le temps d'exécution est en } \Theta(n_A) \text{ avec } n_A \text{ le nombre de noeuds dans l'arbre.}}$$

Solution 2. On note $T(A)$ le temps d'exécution pour un arbre A et n_A son nombre de noeuds. Chaque appel à la fonction s'exécute en temps constant plus le temps d'exécution de zéro, un ou deux appels récursifs. On a trois cas :

- Cas 1 : l'arbre est réduit à une feuille. Il n'y a pas d'appel récursif.
- Cas 2 : la racine est étiquetée par $\neg$. Si on note A' l'arbre privé de sa racine, alors $n_A = n_{A'} + 1$.

- Cas 3 : la racine est étiquetée par $\vee$ ou $\wedge$. Si on note G et D les sous-arbres gauche et droit, alors $n_A = 1 + n_G + n_D$.

Il existe donc une constante c telle que :

$$\begin{cases} T(A) \leqslant c & \text{dans le cas 1} \\ T(A) \leqslant c + T(A') & \text{dans le cas 2} \\ T(A) \leqslant c + T(G) + T(D) & \text{dans le cas 3} \end{cases}$$

Par une récurrence immédiate sur n_A :

$$T(A) \leqslant n_A \times c$$

Donc $T(A) = \mathcal{O}(n_A)$. De même $T(A) = \Omega(n_A)$. Finalement le temps d'exécution est en $\Theta(n_A)$.

Question 3.a –

```
let sont_equiv f1 f2 n =
  let d = Array.make n 0 in
  let rec aux i =
    if i = n then eval d f1 = eval d f2
    else if not (aux (i+1)) then false
    else begin
        d.(i) <- 1;
        let b = aux (i+1) in
        d.(i) <- 0;
        b
      end in
  aux 0;;
```

Question 3.b – Soit $m = \max(m_1, m_2)$ où m_1 et m_2 sont les tailles des deux formules en argument.

Solution 1. Dans le pire cas (les deux formules sont sémantiquement équivalentes), l'arbre des appels récursifs est binaire complet de hauteur n. De plus, sans compter les appels récursifs un appel à `aux` s'exécute :

- En temps constant si `i < n`.
- En temps $\Theta(m)$ si `i = n`.

Dans l'arbre des appels récursifs, il y a 2^n noeuds à profondeur n et $\sum_{p=0}^{n-1} 2^p = 2^n - 1$ noeuds à profondeur $p < n$. Au total :

$$\boxed{\text{Le temps d'exécution est en } \mathcal{O}(2^n) + \mathcal{O}(m2^n) = \mathcal{O}(m2^n)}$$

Solution 2. On souhaite déterminer la complexité d'un appel à « `aux 0` ». On note $T(i)$ le temps d'exécution d'un appel à « `aux i` ». Alors, il existe une constante c telle que :

$$\begin{cases} T(n) \leqslant c \times m & \\ T(i) \leqslant 2T(i+1) + c & \text{pour } 0 \leqslant i < n \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} T(0) &\leqslant cm2^n + \sum_{i=0}^{n} c \times 2^i \\ &= \mathcal{O}(m2^n) + \mathcal{O}(2^n) \\ &= \mathcal{O}(m2^n) \end{aligned}$$

Finalement le temps d'exécution est en $\mathcal{O}(m2^n)$.

Question 4 –

```
let est_tautologie f n = sont_equiv f V n;;
let est_antilogie f n = sont_equiv f F n;;
let est_satifiable f n = not (est_antilogie f n);;
```

Question 5 –

```
let rec subs phi_array f = match f with
  | V -> V
  | F -> F
  | Var i -> phi_array.(i)
  | Non f -> Non (subs phi_array f)
  | Ou (f1, f2) -> Ou (subs phi_array f1, subs phi_array f2)
  | Et (f1, f2) -> Et (subs phi_array f1, subs phi_array f2);;
```

Question 6 – Il s'agit de montrer que si pour toute distribution de vérité μ : $E_\mu(\varphi) = E_\mu(\psi)$ alors pour toute distribution de vérité μ : $E_\mu(S(\varphi)) = E_\mu(S(\psi))$.

Pour l'instant, on fixe μ et on définit μ' par $\mu' : x_i \mapsto E_\mu(\varphi_i)$ pour tout i. Montrons par induction sur φ que $E_\mu(S(\varphi)) = E_{\mu'}(\varphi)$:

- Si $\varphi = \top$ alors $S(\varphi) = \top$ et $E_\mu(S(\varphi)) = 1 = E_{\mu'}(\varphi)$.
- Si $\varphi = \bot$ alors $S(\varphi) = \bot$ et $E_\mu(S(\varphi)) = 0 = E_{\mu'}(\varphi)$.
- Si $\varphi = x_i$ pour un certain i alors $S(\varphi) = \varphi_i$ et $E_\mu(S(\varphi)) = E_{\mu'}(\varphi)$ par définition de μ'.
- Si $\varphi = \neg\psi$ alors $S(\varphi) = \neg S(\psi)$ et d'après l'hypothèse d'induction :

$$E_\mu(S(\varphi)) = 1 - E_\mu(S(\psi)) = 1 - E_{\mu'}(\psi) = E_{\mu'}(\varphi).$$

- Si $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$ alors $S(\varphi) = S(\psi_1) \wedge S(\psi_2)$ et d'après l'hypothèse d'induction :

$$E_\mu(S(\varphi)) = \min(E_\mu(S(\psi_1)), E_\mu(S(\psi_2))) = \min(E_{\mu'}(\psi_1), E_{\mu'}(\psi_2)) = E_{\mu'}(\varphi).$$

- Si $\varphi = \psi_1 \vee \psi_2$ alors $S(\varphi) = S(\psi_1) \vee S(\psi_2)$ et d'après l'hypothèse d'induction :

$$E_\mu(S(\varphi)) = \max(E_\mu(S(\psi_1)), E_\mu(S(\psi_2))) = \max(E_{\mu'}(\psi_1), E_{\mu'}(\psi_2)) = E_{\mu'}(\varphi).$$

On peut maintenant conclure. On suppose que pour toute distribution de vérité μ : $E_\mu(\varphi) = E_\mu(\psi)$. Soit μ une distribution de vérité alors :

$$E_\mu(S(\varphi)) = E_{\mu'}(\varphi) = E_{\mu'}(\psi) = E_\mu(S(\psi)).$$

Exercice 5. Sujet CCP 2012

Question 1 – Il faut au minimum deux déclarations par orateur. En effet :

- ⋆ Avec une seule déclaration, il n'est pas possible de déterminer la nature de l'orateur. Par exemple, s'il commence par un mensonge, on ne peut pas savoir si c'est un menteur ou s'il est changeant.
- ⋆ En revanche, si on a deux déclarations et qu'on sait si ces deux déclarations sont des mensonges ou des vérités, alors on peut déterminer la nature de l'orateur :
  - Si les déclarations sont deux vérités, l'orateur est un véridique.
  - Si les déclarations sont une vérité et un mensonge, l'orateur est un changeant commençant par dire une vérité .
  - Si les déclarations sont un mensonge et une vérité, l'orateur est un changeant commençant par dire un mensonge.
  - Si les déclarations sont deux mensonges, l'orateur est un menteur.

Question 2 – On a :

$$A_V = A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \qquad\qquad A_M = \overline{A_1} \wedge \overline{A_2} \wedge \ldots \wedge \overline{A_n}$$

et

$$\begin{aligned} A_{CV} &= A_1 \wedge \overline{A_2} \wedge A_3 \wedge \overline{A_4} \wedge \ldots \\ &= \bigwedge_{i=1}^{n} B_i \quad \text{où} \quad \begin{cases} B_i = A_i \text{ si } i \text{ est impair,} \\ B_i = \overline{A_i} \text{ si } i \text{ est pair.} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{CM} &= \overline{A_1} \wedge A_2 \wedge \overline{A_3} \wedge A_4 \wedge \ldots \\ &= \bigwedge_{i=1}^{n} B_i \quad \text{où} \quad \begin{cases} B_i = A_i \text{ si } i \text{ est pair,} \\ B_i = \overline{A_i} \text{ si } i \text{ est impair.} \end{cases} \end{aligned}$$

Question 3 – On a :

$$A_1 = R \wedge \overline{B} \qquad A_2 = (R \vee V) \wedge (\overline{R} \vee \overline{V}) \qquad A_3 = (R \wedge V) \Rightarrow B \equiv \overline{R} \vee \overline{V} \vee B$$

Remarque. Le rapport du jury insiste sur le fait que l'expression "Soit ..., soit ..." doit être interprétée comme un "ou exclusif" et non comme un "ou" classique.

Question 4 – On a :

$$\begin{aligned} A_V &= A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 & A_M &= \overline{A_1} \wedge \overline{A_2} \wedge \overline{A_3} \\ A_{CV} &= A_1 \wedge \overline{A_2} \wedge A_3 & A_{CM} &= \overline{A_1} \wedge A_2 \wedge \overline{A_3} \end{aligned}$$

Question 5 – On a :

R	V	B	A_1	A_2	A_3	A_V	A_M	A_{CV}	A_{CM}
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	1	0	0	0
1	0	1	0	1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	1	0	0	0	0

Finalement, l'orateur A est véridique et n'aime que le rouge.

Question 6 – On a :

$$G_1 = C \Rightarrow L \equiv \overline{C} \vee L, \qquad H_1 = (C \vee T) \wedge (\overline{C} \vee \overline{T}), \qquad I_1 = L, \qquad I_2 = \overline{T}.$$

Remarque. Le rapport du jury insiste sur le fait que l'expression "Le cercle n'est visible que si le losange est visible." doit être interprétée comme $C \Rightarrow L$ et non comme $L \Rightarrow C$.

Question 7 – Les informations sur la nature des orateurs sont données par la formule :

$$I = \overline{G_1} \wedge H_1 \wedge ((I_1 \wedge \overline{I_2}) \vee (\overline{I_1} \wedge I_2))$$

Question 8 – On a :

$$\begin{aligned} I &\equiv \neg(\overline{C} \vee L) \wedge (C \vee T) \wedge (\overline{C} \vee \overline{T}) \wedge ((L \wedge \overline{\overline{T}}) \vee (\overline{L} \wedge \overline{T})) \\ &\equiv C \wedge \overline{L} \wedge (C \vee T) \wedge (\overline{C} \vee \overline{T}) \wedge ((L \wedge T) \vee (\overline{L} \wedge \overline{T})) \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} C \wedge (C \vee T) \wedge (\overline{C} \vee \overline{T}) &\equiv C \wedge (\overline{C} \vee \overline{T}) \\ &\equiv C \wedge \overline{T} \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} \overline{L} \wedge \Big((L \wedge T) \vee (\overline{L} \wedge \overline{T})\Big) &\equiv (\overline{L} \wedge L \wedge T) \vee (\overline{L} \wedge \overline{L} \wedge \overline{T}) \\ &\equiv \bot \vee (\overline{L} \wedge \overline{T}) \\ &\equiv \overline{L} \wedge \overline{T} \end{aligned}$$

Donc :

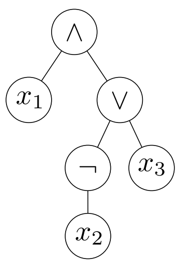
$$I \equiv C \wedge \overline{T} \wedge \overline{L} \wedge \overline{T} \equiv C \wedge \overline{T} \wedge \overline{L}$$

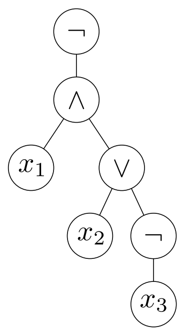
Par hypothèse, la distribution de vérité μ sur $\{C, L, V\}$ est telle que $E_\mu(I) = 1$. On en déduit que $\mu(C) = 1$ et $\mu(L) = \mu(T) = 0$. En conclusion, le cercle est visible, mais pas le losange, ni le triangle. De plus, $E_\mu(L \wedge T) = 0$ alors que $E_\mu(\overline{L} \wedge \overline{T}) = 1$. Donc l'orateur I commence par mentir.

Exercice 6. Écritures arborescente et parenthésée

Question 1 – L'écriture parenthésée de la formule associée à cet arbre est $(\neg(x_1 \vee x_2) \wedge (\overline{x_3} \vee \overline{x_4}))$.

Question 2 – Ce sont les arbres suivants :





Question 3.a – On a :

$$|F_A| = n(A) + 4b(A) + 1$$

Question 3.b – On le montre par récurrence forte sur le nombre de noeuds dans l'arbre A :

- Si A est réduit à une feuille étiquetée par $x \in \{\top, \bot\} \cup V$ alors $|F_A| = 1$. De plus, $n(A) = b(A) = 0$ et la formule est vérifiée.
- Si la racine de A est étiquetée par $\neg$ et que A' est le sous-arbre de A alors $|F_A| = |\neg F_{A'}| = 1 + |F_{A'}|$. On a également :

$$n(A) = n(A') + 1 \qquad\qquad b(A) = b(A')$$

  En utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$|F_A| = 1 + |F_{A'}| = 1 + n(A') + 4b(A') + 1 = n(A) + 4b(A) + 1$$

- Si la racine de A est étiquetée par $\wedge$ et que G et D sont les sous-arbres de A alors $|F_A| = |(F_G \wedge F_D)| = 3 + |F_G| + |F_D|$. On a également :

$$n(A) = n(G) + n(D) \qquad\qquad b(A) = 1 + b(G) + b(D)$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} |F_A| &= 3 + |F_G| + |F_D| \\ &= 3 + n(G) + 4b(G) + 1 + n(D) + 4b(D) + 1 \\ &= 5 + n(A) + 4b(A) - 4 \\ &= n(A) + 4b(A) + 1 \end{aligned}$$

- Si la racine de A est étiquetée par $\vee$ on utilise le même raisonnement que dans le cas du $\wedge$.

Exercice 7.

Question 1 – La 3-clause ψ est de la forme $\psi = \ell_1 \vee \ell_2 \vee \ell_3$. Pour qu'une distribution de vérité μ vérifie $E_\mu(\psi) = 0$, il faut que $E_\mu(\ell_1) = E_\mu(\ell_2) = E_\mu(\ell_3) = 0$. Si on note x_1, x_2 et x_3 les variables présentent dans ψ, on en déduit que $\mu(x_1)$, $\mu(x_2)$ et $\mu(x_3)$ sont fixées et que $\mu(v)$ peut être quelconque pour toute autre variable $v \in V \setminus \{x_1, x_2, x_3\}$.

Puisque le nombre de variables dans $V \setminus \{x_1, x_2, x_3\}$ est $n-3$, le nombre de distributions de vérités qui ne satisfont pas ψ est 2^{n-3}. Finalement, le nombre de distributions de vérités qui satisfont ψ est $2^n - 2^{n-3} = \dfrac{7}{8}2^n$.

Question 2 – On note $\psi_1, \ldots, \psi_m$ les 3-clauses présentes dans φ et :

$$\begin{aligned} M &= \Big\{\mu : E_\mu(\varphi) = 0\Big\}, \\ M_j &= \Big\{\mu : E_\mu(\psi_j) = 0\Big\} \qquad \text{pour tout } j \in [\![1, m]\!]. \end{aligned}$$

Pour qu'une distribution de vérité μ vérifie $E_\mu(\varphi) = 0$, il faut et il suffit que $E_\mu(\psi_j) = 0$ pour au moins l'un des ψ_j. Ainsi :

$$M = \bigcup_{j=1}^{m} M_j.$$

Si φ est une antilogie alors M contient toutes les distributions de vérité, c'est à dire $|M| = 2^n$. En utilisant la question précédente :

$$2^n = |M| = \left|\bigcup_{j=1}^{m} M_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{m} |M_j| = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{8}2^n = \frac{m}{8}2^n$$

D'où $m \geqslant 8$.