Exercice 1. Tables de vérité

Question 1.a – Si nécessaire, on peut ajouter des étapes intermédiaires dans les tableaux.

x_1	x_2	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
0	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	1	0	0	0	0

x_0	x_1	x_2	φ_5
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Question 1.b – On a :
$\varphi_1 \models \varphi_2$, $\varphi_1 \models \varphi_3$, $\varphi_1 \models \varphi_4$,
$\varphi_4 \models \varphi_2$, $\varphi_4 \models \varphi_3$
$\varphi_2 \equiv \varphi_3$ donc $\varphi_2 \models \varphi_3$, $\varphi_3 \models \varphi_2$
$\varphi_1 \models \varphi_5$, $\varphi_5 \models \varphi_2$, $\varphi_5 \models \varphi_3$

Question 2 – On établit les tables de vérité de ces deux formules :

φ_1	φ_2	$(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) \land (\varphi_2 \Rightarrow \varphi_1)$	$\neg(\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2)$
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

D'où les deux équivalences sémantiques.

Question 3.a – Pour toutes formules logiques φ_1 et φ_2 :

$$\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2 \equiv \varphi_2 \Leftrightarrow \varphi_1$$

Question 3.b – Pour toutes formules logiques φ_1, φ_2 et φ_3 :

$$(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) \land (\varphi_2 \Rightarrow \varphi_3) \models \varphi_1 \Rightarrow \varphi_3$$

Question 3.c – Pour toutes formules logiques φ_1 et φ_2 :

$$\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2 \equiv \overline{\varphi_2} \Rightarrow \overline{\varphi_1}$$

Question 3.d – Pour toute formule logique φ :

$$\overline{\varphi} \Rightarrow \perp \equiv \varphi$$

Question 4 –

⋆ Pour φ_1, on pose :

$$\psi_1 = (x_2 \vee x_1) \Rightarrow (\neg(x_1 \wedge \overline{x_3}) \oplus x_2)$$

alors $\varphi_1 = \psi_1 \wedge \neg\psi_1$. Soit μ une distribution de vérité. Si $E_\mu(\psi_1) = 1$ alors $E_\mu(\neg\psi_1) = 0$ donc $E_\mu(\varphi_1) = 0$. Sinon, $E_\mu(\psi_1) = 0$ donc $E_\mu(\neg\psi_1) = 1$ et $E_\mu(\varphi_1) = 0$ également. Donc φ_1 est une antilogie.

⋆ Pour φ_2, on pose :

$$\psi_2 = (x_2 \Leftrightarrow \overline{x_1}) \oplus \neg(x_1 \vee x_2 \vee x_3)$$

alors $\varphi_2 = \psi_2 \oplus \neg\psi_2$ Soit μ une distribution de vérité. Si $E_\mu(\psi_2) = 1$ alors $E_\mu(\neg\psi_2) = 0$ donc $E_\mu(\varphi_2) = 1$. Sinon $E_\mu(\psi_2) = 0$ donc $E_\mu(\neg\psi_2) = 1$ et $E_\mu(\varphi_2) = 1$ également. Donc φ_2 est satisfiable et est une tautologie.

Exercice 2. Simplification de formules

Question 1 – On a :

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= (x_1 \vee (x_2 \Rightarrow x_3)) \Rightarrow (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \\
&\equiv \neg(x_1 \vee (\overline{x_2} \vee x_3)) \vee (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \\
&\equiv (\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge \overline{x_3}) \vee (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \\
&\equiv (\overline{x_1} \vee x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x_3} \vee x_1 \vee x_2 \vee x_3) \\
&\equiv \top \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge \top \\
&\equiv x_1 \vee x_2 \vee x_3
\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}
\varphi_2 &= (x_1 \Rightarrow \overline{x_2}) \Rightarrow (x_1 \vee x_2) \\
&\equiv \neg(\overline{x_1} \vee \overline{x_2}) \vee (x_1 \vee x_2) \\
&\equiv (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \vee x_2) \\
&\equiv \Big((x_1 \wedge x_2) \vee x_1\Big) \vee x_2 \\
&\equiv x_1 \vee x_2
\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}
\varphi_3 &= \Big[(x_1 \Rightarrow (\overline{x_1} \wedge x_2)) \wedge (x_2 \Rightarrow x_1) \wedge (x_2 \Rightarrow \overline{x_1})\Big] \vee \Big[x_1 \wedge x_2 \wedge (x_2 \Rightarrow x_1)\Big] \\
&\equiv \Big[(\overline{x_1} \vee (\overline{x_1} \wedge x_2)) \wedge (\overline{x_2} \vee x_1) \wedge (\overline{x_2} \vee \overline{x_1})\Big] \vee \Big[x_1 \wedge x_2 \wedge (\overline{x_2} \vee x_1)\Big] \\
&\equiv \Big[(\overline{x_1} \wedge (\overline{x_2} \vee x_1)) \wedge (\overline{x_2} \vee \overline{x_1})\Big] \vee \Big[(x_1 \wedge (\overline{x_2} \vee x_1)) \wedge x_2\Big] \\
&\equiv \Big[(\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}) \wedge (\overline{x_2} \vee \overline{x_1})\Big] \vee \Big[x_1 \wedge x_2\Big] \\
&\equiv \Big[\overline{x_1} \wedge (\overline{x_2} \wedge (\overline{x_2} \vee \overline{x_1}))\Big] \vee \Big[x_1 \wedge x_2\Big] \\
&\equiv (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}) \vee (x_1 \wedge x_2)
\end{aligned}$$

Question 2 –

⋆ Pour φ_1, on a :

$$\varphi_1 = x_1 \Rightarrow (x_2 \Rightarrow x_1) \equiv \overline{x_1} \vee (\overline{x_2} \vee x_1) \equiv \top \vee \overline{x_2} \equiv \top$$

Donc pour toute distribution de vérité μ :

$$E_\mu(\varphi_1) = E_\mu(\top) = 1$$

Donc φ_1 est satisfiable et est une tautologie.

⋆ Pour φ_2, on a :

$$\begin{aligned}\varphi_2 &= x_1 \texttt{ NOR } (x_2 \texttt{ NOR } x_1)\\ &\equiv \neg(x_1 \vee \neg(x_2 \vee x_1))\\ &\equiv \overline{x_1} \wedge (x_2 \vee x_1)\\ &\equiv \overline{x_1} \wedge x_2\end{aligned}$$

Donc φ_2 est satisfiable mais n'est pas une tautologie, en effet :

- Soit $\mu : \begin{cases} x_1 \mapsto 0 \\ x_2 \mapsto 1 \end{cases}$ alors $E_\mu(\varphi_2) = E_\mu(\overline{x_1} \wedge x_2) = 1$. Donc φ_2 est satisfiable et n'est pas une antilogie.
- Soit $\mu : \begin{cases} x_1 \mapsto 1 \\ x_2 \mapsto 1 \end{cases}$ alors $E_\mu(\varphi_2) = E_\mu(\overline{x_1} \wedge x_2) = 0$. Donc φ_2 n'est pas une tautologie.

⋆ Pour φ_3, on a :

$$\begin{aligned}\varphi_3 &= (x_2 \vee x_1) \wedge \neg(x_1 \vee x_2)\\ &\equiv (x_2 \vee x_1) \wedge (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2})\\ &\equiv ((x_2 \vee x_1) \wedge \overline{x_1}) \wedge \overline{x_2}\\ &\equiv (\overline{x_1} \wedge x_2) \wedge \overline{x_2}\\ &\equiv \overline{x_1} \wedge \bot\\ &\equiv \bot\end{aligned}$$

Donc φ_3 est une antilogie.

Exercice 3. Sujet CCP 2012

Question 1 – Il faut au minimum deux déclarations par orateur. En effet :

⋆ Avec une seule déclaration, il n'est pas possible de déterminer la nature de l'orateur. Par exemple, s'il commence par un mensonge, on ne peut pas savoir si c'est un menteur ou s'il est changeant.

⋆ En revanche, si on a deux déclarations et qu'on sait si ces deux déclarations sont des mensonges ou des vérités, alors on peut déterminer la nature de l'orateur :
  - Si les déclarations sont deux vérités, l'orateur est un véridique.
  - Si les déclarations sont une vérité et un mensonge, l'orateur est un changeant commençant par dire une vérité .
  - Si les déclarations sont un mensonge et une vérité, l'orateur est un changeant commençant par dire un mensonge.
  - Si les déclarations sont deux mensonges, l'orateur est un menteur.

Question 2 – On a :

$$A_V = A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \qquad\qquad A_M = \overline{A_1} \wedge \overline{A_2} \wedge \ldots \wedge \overline{A_n}$$

et

$$\begin{aligned} A_{CV} &= A_1 \wedge \overline{A_2} \wedge A_3 \wedge \overline{A_4} \wedge \ldots \\ &= \bigwedge_{i=1}^{n} B_i \quad \text{où} \quad \begin{cases} B_i = A_i \text{ si } i \text{ est impair,} \\ B_i = \overline{A_i} \text{ si } i \text{ est pair.} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{CM} &= \overline{A_1} \wedge A_2 \wedge \overline{A_3} \wedge A_4 \wedge \ldots \\ &= \bigwedge_{i=1}^{n} B_i \quad \text{où} \quad \begin{cases} B_i = A_i \text{ si } i \text{ est pair,} \\ B_i = \overline{A_i} \text{ si } i \text{ est impair.} \end{cases} \end{aligned}$$

Question 3 – On a :

$$A_1 = R \wedge \overline{B} \qquad A_2 = (R \vee V) \wedge (\overline{R} \vee \overline{V}) \qquad A_3 = (R \wedge V) \Rightarrow B \equiv \overline{R} \vee \overline{V} \vee B$$

Remarque. Le rapport du jury insiste sur le fait que l'expression "Soit ..., soit ..." doit être interprétée comme un "ou exclusif" et non comme un "ou" classique.

Question 4 – On a :

$$\begin{aligned} A_V &= A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \qquad & A_M &= \overline{A_1} \wedge \overline{A_2} \wedge \overline{A_3} \\ A_{CV} &= A_1 \wedge \overline{A_2} \wedge A_3 \qquad & A_{CM} &= \overline{A_1} \wedge A_2 \wedge \overline{A_3} \end{aligned}$$

Question 5 – On a :

R	V	B	A_1	A_2	A_3	A_V	A_M	A_{CV}	A_{CM}
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	1	0	0	0
1	0	1	0	1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	1	0	0	0	0

Finalement, l'orateur A est véridique et n'aime que le rouge.

Question 6 – On a :

$$G_1 = C \Rightarrow L \equiv \overline{C} \vee L, \qquad H_1 = (C \vee T) \wedge (\overline{C} \vee \overline{T}), \qquad I_1 = L, \qquad I_2 = \overline{T}.$$

Remarque. Le rapport du jury insiste sur le fait que l'expression "Le cercle n'est visible que si le losange est visible." doit être interprétée comme $C \Rightarrow L$ et non comme $L \Rightarrow C$.

Question 7 – Les informations sur la nature des orateurs sont données par la formule :

$$I = \overline{G_1} \wedge H_1 \wedge ((I_1 \wedge \overline{I_2}) \vee (\overline{I_1} \wedge I_2))$$

Question 8 – On a :

$$\begin{aligned} I &\equiv \neg(\overline{C} \vee L) \wedge (C \vee T) \wedge (\overline{C} \vee \overline{T}) \wedge ((L \wedge \overline{\overline{T}}) \vee (\overline{L} \wedge \overline{T})) \\ &\equiv C \wedge \overline{L} \wedge (C \vee T) \wedge (\overline{C} \vee \overline{T}) \wedge ((L \wedge T) \vee (\overline{L} \wedge \overline{T})) \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} C \wedge (C \vee T) \wedge (\overline{C} \vee \overline{T}) &\equiv C \wedge (\overline{C} \vee \overline{T}) \\ &\equiv C \wedge \overline{T} \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} \overline{L} \wedge \Big((L \wedge T) \vee (\overline{L} \wedge \overline{T})\Big) &\equiv (\overline{L} \wedge L \wedge T) \vee (\overline{L} \wedge \overline{L} \wedge \overline{T}) \\ &\equiv \bot \vee (\overline{L} \wedge \overline{T}) \\ &\equiv \overline{L} \wedge \overline{T} \end{aligned}$$

Donc :

$$I \equiv C \wedge \overline{T} \wedge \overline{L} \wedge \overline{T} \equiv C \wedge \overline{T} \wedge \overline{L}$$

Par hypothèse, la distribution de vérité μ sur $\{C, L, V\}$ est telle que $E_\mu(I) = 1$. On en déduit que $\mu(C) = 1$ et $\mu(L) = \mu(T) = 0$. En conclusion, le cercle est visible, mais pas le losange, ni le triangle. De plus, $E_\mu(L \wedge T) = 0$ alors que $E_\mu(\overline{L} \wedge \overline{T}) = 1$. Donc l'orateur I commence par mentir.

Exercice 4. Écritures arborescente et parenthésée

Question 1 – L'écriture parenthésée de la formule associée à cet arbre est $(\neg(x_1 \vee x_2) \wedge (\overline{x_3} \vee \overline{x_4}))$.

Question 2 – Ce sont les arbres suivants :

Question 3.a – On a :

$$|F_A| = n(A) + 4b(A) + 1$$

Question 3.b – On le montre par récurrence forte sur le nombre de noeuds dans l'arbre A :

- Si A est réduit à une feuille étiquetée par $x \in \{\top, \bot\} \cup V$ alors $|F_A| = 1$. De plus, $n(A) = b(A) = 0$ et la formule est vérifiée.
- Si la racine de A est étiquetée par $\neg$ et que A' est le sous-arbre de A alors $|F_A| = |\neg F_{A'}| = 1 + |F_{A'}|$. On a également :

  $$n(A) = n(A') + 1 \qquad\qquad b(A) = b(A')$$

  En utilisant l'hypothèse de récurrence :

  $$|F_A| = 1 + |F_{A'}| = 1 + n(A') + 4b(A') + 1 = n(A) + 4b(A) + 1$$

- Si la racine de A est étiquetée par $\wedge$ et que G et D sont les sous-arbres de A alors $|F_A| = |(F_G \wedge F_D)| = 3 + |F_G| + |F_D|$. On a également :

$$n(A) = n(G) + n(D) \qquad\qquad b(A) = 1 + b(G) + b(D)$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} |F_A| &= 3 + |F_G| + |F_D| \\ &= 3 + n(G) + 4b(G) + 1 + n(D) + 4b(D) + 1 \\ &= 5 + n(A) + 4b(A) - 4 \\ &= n(A) + 4b(A) + 1 \end{aligned}$$

- Si la racine de A est étiquetée par $\vee$ on utilise le même raisonnement que dans le cas du $\wedge$.

Exercice 5. Logique tri-valuée (CCP 2017)

Il s'agit d'une partie du sujet CCP 2017. Ce corrigé a été fait par Alain Schauber, merci à lui !

Question 1 – Soit $A \in \mathcal{V}$ et f une tri-valuation définie sur $\mathcal{V}$ telle que $f(A) = ?$, donc $\hat{f}(\neg A) = ?$ et par suite $\hat{f}(A \vee \neg A) = ? \neq \top$.

$$\boxed{\not\Vdash_3 A \vee \neg A}$$

Question 2 – Telle que définie dans l'énoncé, la logique tri-valuée ne reconnaît pas les formules constantes $\perp$ et $\top$, sinon cette dernière aurait pu fournir une réponse à la question. On peut cependant proposer : $A \Rightarrow A$. En effet, si A est une variable propositionnelle alors quelle que soit la tri-valuation f, on a $\hat{f}(A \Rightarrow A) = \top$, car les lignes de la table de vérité de $A \Rightarrow B$ correspondant à deux tri-valuations identiques pour A et B fournissent une tri-valuation égale à $\top$ pour $A \Rightarrow B$. Par induction structurelle (ou à l'aide du théorème de substitution), ce résultat reste vrai si on prend pour A une formule logique quelconque.

$$\boxed{\Vdash_3 A \Rightarrow A}$$

Question 3 – On peut proposer pour tout couple $(A, B) \in \mathcal{V}^2$ et toute tri-valuation f :

$$\boxed{\hat{f}(A \wedge B) = \min(f(A), f(B)) \text{ et } \hat{f}(A \vee B) = \max(f(A), f(B))}$$

Question 4 – Il est clair en observant la table de vérité de $A \vee B$ que les propositions $A \vee B$ et $B \vee A$ sont équivalentes. Par suite, si on avait $\neg A \vee B$ équivalente à $A \Rightarrow B$ on aurait (par transitivité et spécialisation) équivalence entre les propositions $A \vee \neg A$ et $A \Rightarrow A$. Mais on a vu en question 1 que $\not\Vdash_3 A \vee \neg A$ alors que dans la question 2 on a établi que $\Vdash_3 A \Rightarrow A$. En conclusion :

$$\boxed{\text{Les propositions } \neg A \vee B \text{ et } A \Rightarrow B \text{ ne sont pas équivalentes en logique tri-valuée}}$$

Question 5 – Comme demandé, on construit la table de vérité conjointe des deux propositions pour les comparer :

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B$	$\neg A$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$
$\top$	?	?	?	$\perp$	?
$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\perp$	?	$\top$	?	$\top$	$\top$
?	$\top$	$\top$	$\perp$	?	$\top$
?	$\perp$	?	$\top$	?	?
?	?	$\top$	?	?	$\top$

On en déduit que : $\boxed{\text{Les propositions } \neg B \Rightarrow \neg A \text{ et } A \Rightarrow B \text{ sont équivalentes}}$

Question 6 – Soit $\psi = ((A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$. On en construit la table de vérité :

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow B)$	B	ψ
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$
$\top$	?	?	$\top$	?	?	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$
$\perp$	?	$\top$	?	?	?	$\top$
?	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
?	$\perp$	?	?	?	$\perp$	?
?	?	$\top$	$\top$	$\top$	?	?

On constate en observant les deux dernières lignes que : $\boxed{\not\Vdash_3 \psi}$

Question 7 – Notons q la tri-valuation de $\mathcal{V}$ dans $\{\top, \perp, ?\}$ définie par : $\forall A \in \mathcal{V}, q(A) = ?$. La dernière ligne de la table de vérité montre que $\hat{q}(A \to A) = ? \neq \top$, d'où : $\boxed{A \to A \text{ n'est pas une tautologie}}$

Question 8 – Dans cette question semble se confirmer la remarque de la question 2 concernant l'absence de la constante $\top$ dans l'ensemble des formules de la logique tri-valuée, car sinon elle représenterait une tautologie. Notons q la tri-valuation de $\mathcal{V}$ dans $\{\top, \perp, ?\}$ définie par : $\forall A \in \mathcal{V}, q(A) = ?$. Pour montrer qu'il n'existe pas de tautologie dans la logique tri-valuée associée aux opérateurs $\{\neg, \wedge, \vee, \to\}$, il suffit d'établir que : $\forall \phi \in \mathcal{F}, \hat{q}(\phi) = ?$. Montrons cela par induction structurelle. Soit $\phi \in \mathcal{F}$.

- Si $\phi \in \mathcal{V}$ alors $\hat{q}(\phi) = q(\phi) = ?$.
- Supposons $\phi = \neg\phi_0$ et $\hat{q}(\phi_0) = ?$. La table de vérité de l'opérateur $\neg$ montre que dans ce cas $\hat{q}(\phi) = \hat{q}(\neg\phi_0) = ?$.
- Supposons $\phi = \phi_1 \Diamond \phi_2$ où ϕ_1, ϕ_2 vérifient l'hypothèse d'induction et $\Diamond$ représente l'un quelconque des opérateurs binaires $\wedge$, $\vee$ ou $\to$. En remarquant qu'une tri-valuation indéterminée à la fois de ϕ_1 et ϕ_2 correspond à la dernière ligne du tableau de vérité de tous ces opérateurs binaires, et que le résultat est dans les trois cas égal à ?, on en déduit que $\hat{q}(\phi) = \hat{q}(\phi_1 \Diamond \phi_2) = ?$.

$$\boxed{\text{Il n'existe pas de tautologie dans la logique tri-valuée associée aux opérateurs } \{\neg, \wedge, \vee, \to\}}$$

Question 9 – Cette question est inintelligible ! Et cela pour plusieurs raisons, dont :

- La proposition à étudier n'est pas une formule logique tri-valuée, donc le mot “tautologie” est inadapté.
- L'expression “est équivalent à” n'est pas définie dans le sujet : cela signifie-t-il $\Leftrightarrow$ au sens de la logique bi-valuée ? En un sens analogue non défini de la logique tri-valuée ? Ou au sens de “même valeur de vérité” ?
- La présence de $(\Vdash_3 A \to B)$ est pour le moins étrange au regard de ce qu'on a montré dans la question 8 ...

Je pense que la question posée porte sur le problème suivant : on sait qu'en logique bi-valuée, pour démontrer un théorème de la forme $H \Rightarrow C$ il suffit de supposer que H est satisfaite et d'en déduire que C est satisfaite. Cette méthode correspond au ***lemme de déduction***, qu'on peut énoncer ainsi (on note $\mathcal{T}_2$ l'ensemble des bi-valuations) :

$$\forall A, B \in \mathcal{F}, \forall f \in \mathcal{T}_2,\ \texttt{si}\ \hat{f} \vdash_2 (A)\ \texttt{entraÃőne}\ \hat{f} \vdash_2 (B)\ \texttt{alors}\ \hat{f} \vdash_2 (A \Rightarrow B)$$

À contrario, la règle du ***modus ponens*** exprime le fait que si un théorème du type $H \Rightarrow C$ est démontré, il suffit de vérifier H (l'hypothèse) pour pouvoir affirmer que C (la conclusion) est vérifiée, ce qui s'exprime par :

$$\forall A, B \in \mathcal{F}, \forall f \in \mathcal{T}_2,\ \texttt{si}\ \hat{f} \vdash_2 (A \Rightarrow B)\ \texttt{alors}\ \hat{f} \vdash_2 (A)\ \texttt{entraÃőne}\ \hat{f} \vdash_2 (B)$$

Le but de cette question est donc d'étudier si cette équivalence reste valable en tri-valuation et avec le nouvel opérateur d'implication. Autrement dit, le problème est d'examiner l'énoncé suivant :

$$\forall A, B \in \mathcal{F}, \forall f \in \mathcal{T}_3, \left(\hat{f} \vdash_3 (A) \texttt{ entraÃőne } \hat{f} \vdash_3 (B)\right) \texttt{ si et seulement si } \left(\hat{f} \vdash_3 (A \Rightarrow B)\right)$$

qui peut être reformulée à l'aide des opérateurs classiques $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ de la logique bi-valuée "ordinaire" :

$$\forall A, B \in \mathcal{F}, \forall f \in \mathcal{T}_3, \left(\hat{f} \vdash_3 (A) \Rightarrow \hat{f} \vdash_3 (B)\right) \Leftrightarrow \left(\hat{f} \vdash_3 (A \Rightarrow B)\right)$$

Or il est clair en considérant $A, B \in \mathcal{V}$ et $f \in \mathcal{T}_3$ telle que $f(A) = ?$ et $f(B) = \perp$ que la proposition $\left(\hat{f} \vdash_3 (A) \texttt{ entraÃőne } \hat{f} \vdash_3 (B)\right)$ est vraie (car $\hat{f} \vdash_3 (A)$ est fausse), tandis que $\left(\hat{f} \vdash_3 (A \Rightarrow B)\right)$ est fausse (car $\hat{f}(A \Rightarrow B) = ? \neq \top$: voir avant-dernière ligne de la table de vérité de l'opérateur $\rightarrow$).

$$\boxed{\text{La proposition } \left(\hat{f} \vdash_3 (A) \texttt{ entraÃőne } \hat{f} \vdash_3 (B)\right) \text{ n'est pas équivalente à } \left(\hat{f} \vdash_3 (A \Rightarrow B)\right)}$$

Remarque : c'est donc le lemme de déduction qui est mis en défaut en logique tri-valuée (et ceci avec les deux définitions de l'implication proposées dans le sujet). On peut toutefois vérifier que le modus ponens reste valable.

Question 10 – Apparition tardive des constantes propositionnelles . . . On définit la formule ψ de la question 6.

```
let psi = Implique (Et (Implique (Var "A", Var "B"), Implique (Non (Var "A"), Var "B")),
   Var "B");;
```

Question 11 – L'exemple fourni dans le sujet étant assez court, je choisis d'écrire une fonction a minima, c'est-à-dire sans parenthésage des constantes, variables et négations de constantes ou de variables mais en conservant tous les autres parenthésages. En particulier, les règles de priorité usuelles entre opérateurs ne sont pas implémentées.

```
let rec lectureFormule f =
  (* identification des formules logiques qui ne sont pas parenthésées *)
  let est_simple f0 = match f0 with
    |Vrai |Faux |Indetermine |Var _
     |Non Vrai |Non Faux |Non Indetermine |Non (Var _) -> true
    |_ -> false
  in match f with
       Vrai -> "vrai"
      |Faux -> "faux"
      |Indetermine -> "Indéterminé"
      |Var s -> s
      |Non g when est_simple g -> "non "^(lectureFormule g)
      |Non g -> "non ("^(lectureFormule g)^")"
      |Et (g,h) when est_simple g && est_simple h ->
        (lectureFormule g)^" et "^(lectureFormule h)
      |Et (g,h) when est_simple g ->
        (lectureFormule g)^" et ("^(lectureFormule h)^")"
      |Et (g,h) when est_simple h ->
        "("^(lectureFormule g)^") et "^(lectureFormule h)
      |Et (g,h) ->
        "("^(lectureFormule g)^") et ("^(lectureFormule h)^")"
      |Ou (g,h) when est_simple g && est_simple h ->
        (lectureFormule g)^" ou "^(lectureFormule h)
      |Ou (g,h) when est_simple g ->
        (lectureFormule g)^" ou ("^(lectureFormule h)^")"
      |Ou (g,h) when est_simple h ->
        "("^(lectureFormule g)^") ou "^(lectureFormule h)
      |Ou (g,h) ->
        "("^(lectureFormule g)^") ou ("^(lectureFormule h)^")"
      |Implique (g,h) when est_simple g && est_simple h ->
        (lectureFormule g)^" implique "^(lectureFormule h)
      |Implique (g,h) when est_simple g ->
        (lectureFormule g)^" implique ("^(lectureFormule h)^")"
      |Implique (g,h) when est_simple h ->
        "("^(lectureFormule g)^") implique "^(lectureFormule h)
      |Implique (g,h) ->
        "("^(lectureFormule g)^") implique ("^(lectureFormule h)^")";;
```