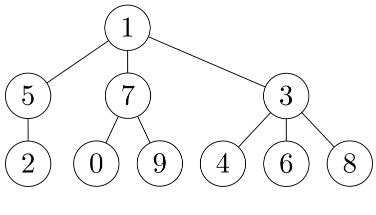
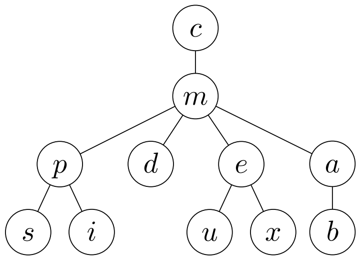
Exercice 3. Parcours d'un arbre d'arité quelconque

Question 1 –



gen_G1



gen_G2

Question 2 –

```
(* La fonction 'aux' prend en entree un accumulateur et une liste
   d'arbres et renvoie la concatenation des parcours prefixes des arbres
   concatenée avec l'accumulateur. *)
let parc_pre_gen a =
  let rec aux acc li = match li with
    | [] -> acc
    | N_gen (e, f)::q -> e::aux (aux acc q) f in
  aux [] [a];;
```

Question 3 –

```
(* La fonction 'aux' prend en entree un accumulateur et une liste
   d'arbres et renvoie la concatenation des parcours postfixes des arbres
   concatenée avec l'accumulateur. *)
let parc_post_gen a =
  let rec aux acc li = match li with
    | [] -> acc
    | N_gen (e, f)::q -> aux (e::aux acc q) f in
  aux [] [a];;
```

Question 4 – La fonction `ajout_fils_dans_file` prend en argument une file et une liste d'arbres et ajoute tous les arbres de la liste dans la file.

```
(* Prend en argument une file et une liste d'arbres.
   Ajoute tous les éléments de la liste dans la file *)
let rec ajout_fils_dans_file (file: 'a gen Queue.t) (li: 'a gen list): unit =
  match li with
  | [] -> ()
  | a::q -> Queue.push a file;
            ajout_fils_dans_file file q;;
```

```
let parc_larg_gen a =
  let file = Queue.create() in
  Queue.push a file;
  let rec aux () =
    if Queue.is_empty file then [] else
      match Queue.pop file with
      | N_gen (e, f) ->
          ajout_fils_dans_file file f;
          e::aux() in
  aux();;
```

Exercice 4. Nombre de Strahler

Question 1 –

```
let rec nb_strahler a = match a with
  | F_abs _ -> 1
  | N_abs(_, g, d) ->
     let sg = nb_strahler g and
         sd = nb_strahler d in
     if sd = sg then sd + 1 else max sd sg;;
```

Question 2 – Pour tout arbre A, on note h_A la hauteur de A et s_A son nombre de Strahler.

⋆ Montrons par récurrence sur $h \in \mathbb{N}$ la propriété :

$$(\mathcal{P}_h) : \text{pour tout arbre } A, \text{ si } h_A = h \text{ alors } s_A \leqslant h + 1.$$

→ Pour $h = 0$: si $h_A = 0$ alors A est réduit à une feuille donc $s_A = 1 \leqslant h_A + 1$.

→ Soit $h \in \mathbb{N}^*$. On suppose $(\mathcal{P}_{h'})$ pour tout $h' < h$ et on montre $(\mathcal{P}_h)$. Soit A tel que $h_A = h$ et G, D les sous-arbres gauche et droit de A. Alors :

$$h_A = 1 + \max(h_G, h_D).$$

Par hypothèse de récurrence :

$$s_G \leqslant h_G + 1 \qquad\qquad s_D \leqslant h_D + 1$$

On traite deux cas :

- Si $s_G = s_D$ alors :

$$s_A = s_G + 1 \leqslant h_G + 2 \leqslant \max(h_G, h_D) + 2 = h + 1$$

- Si $s_G \neq s_D$:

$$s = \max(s_G, s_D) \leqslant \max(h_G + 1, h_D + 1) = \max(h_G, h_D) + 1 = h \leqslant h + 1$$

⋆ Montrons par récurrence sur $h \in \mathbb{N}$ la propriété :

$$(\mathcal{P}_h) : \text{pour tout arbre binaire complet } A, \text{ si } h_A = h \text{ alors } s_A = h_A + 1.$$

→ Pour $h = 0$: si $h_A = 0$ alors A est réduit à une feuille donc $s_A = 1 = h_A + 1$.

→ Soit $h \in \mathbb{N}$. On suppose $(\mathcal{P}_h)$ et on montre $(\mathcal{P}_{h+1})$. Soit A un arbre binaire complet tel que $h_A = h+1$. Soient G et D les sous-arbres gauche et droit de A. Alors G et D sont binaires complets et vérifient $h_G = h_D = h_A - 1 = h$. Par l'hypothèse de récurrence : $s_G = h + 1 = s_D$. Ainsi :

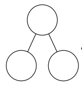
$$s_A = s_G + 1 = h + 2$$

⋆ En conclusion :

$$\boxed{\text{Le nombre de Strahler maximal pour un arbre de hauteur } h \text{ est } h + 1.}$$

Question 3 –

⋆ Montrons par récurrence sur $h \in \mathbb{N}^*$ que pour tout arbre A, si $h_A = h$ alors $s_A \geqslant 2$:

→ Pour $h = 1$: si $h_A = 1$ alors A est de la forme . Donc $s_A = 2$.

→ Soit $h \geqslant 2$. On suppose la propriété vraie pour tout $h' < h$ et on la montre pour h. Soit A tel que $h_A = h$ et G, D les sous-arbres gauche et droit de A. Alors :

$$h_A = 1 + \max(h_G, h_D).$$

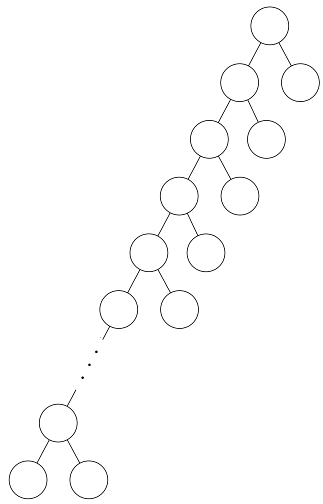
Ainsi, $h_G \geqslant 1$ ou $h_D \geqslant 1$. Dans la suite on suppose $h_G \geqslant 1$ (le cas $h_D \geqslant 1$ se traite de manière similaire). Par hypothèse de récurrence :

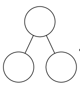
$$s_G \geqslant 2.$$

Dans tous les cas ($s_G = s_D$ ou $s_G \neq s_D$), on a :

$$s_A \geqslant s_G \geqslant 2.$$

⋆ Pour tout $h \geqslant 1$, on note A_h l'arbre binaire strict de hauteur h ci-contre. Montrons par récurrence sur $h \in \mathbb{N}^*$ que $s_{A_h} = 2$:



→ Pour $h = 1$: l'arbre A_1 est . On a bien $s_{A_1} = 2$.

→ Soit $h \in \mathbb{N}^*$. On suppose la propriété vraie au rang h et on la montre au rang $h+1$. Soient G et D les sous-arbres gauche et droit de A_{h+1}. Alors $G = A_h$ et D est réduit à une feuille. Par hypothèse de récurrence :

$$s_G = 2 \qquad\qquad s_D = 1$$

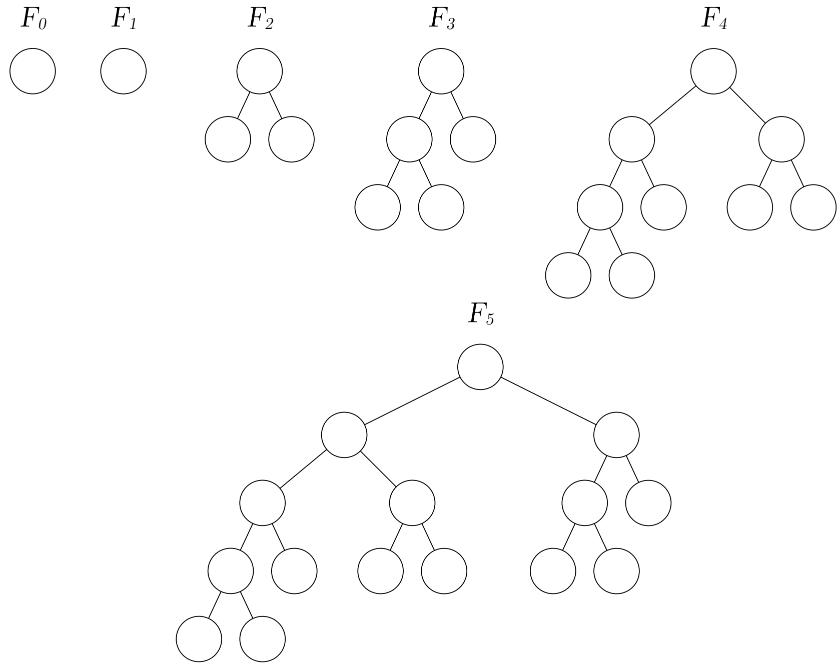
Ainsi, $s_{A_{h+1}} = 2$.

⋆ En conclusion :

$$\boxed{\text{Le nombre de Strahler minimal pour un arbre de hauteur } h \text{ est 2 si } h \geqslant 1 \text{ et 1 si } h = 0.}$$

Exercice 5. Arbres de Fibonacci (exercice facultatif)

Question 1 –



Question 2 –

```
let make_fibo n0 =
  let rec aux n = match n with
    | 0 -> F_abs (), F_abs ()
    | n -> let fnm1, fn = aux (n-1) in
          fn, N_abs ((), fn, fnm1)
  in
  if n0 < 0 then failwith "n < 0"
  else if n0 = 0 then F_abs ()
  else snd (aux (n0-1));;
```

Question 3 – On note m_n le nombre de feuilles de F_n. On a :

$$m_0 = m_1 = 1 \qquad\qquad m_{n+2} = m_n + m_{n+1} \text{ pour tout } n \geqslant 0$$

Donc $m_n = f_n$ pour tout $n \geqslant 0$.
En conclusion le nombre de feuilles de F_n est f_n, son nombre de noeuds internes est $f_n - 1$ (car c'est un arbre binaire strict) et son nombre de noeuds est $2f_n - 1$.

Question 4 – On note h_n la hauteur de F_n. On a :

$$h_0 = h_1 = 0 \qquad\qquad h_{n+2} = 1 + \max(h_n, h_{n+1}) \text{ pour tout } n \geqslant 0$$

Par une récurrence immédiate sur n, on a :

$$h_0 = 0 \qquad\qquad h_n = n - 1 \text{ pour tout } n \geqslant 1$$

Montrons par récurrence sur n que F_n est équilibré :

- → Pour $n = 0$ ou $n = 1$ c'est vrai.
- → Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que F_n et F_{n+1} sont équilibrés et on montre que F_{n+2} est équilibré. On doit montrer que pour chaque noeud de F_{n+2}, la hauteur du sous-arbre gauche et la hauteur du sous-arbre droit diffèrent au plus de 1. Un noeud de F_{n+2} vérifie l'une de ces trois conditions :
  - C'est un noeud de F_n. Dans ce cas, l'hypothèse de récurrence assure que la hauteur du sous-arbre gauche et la hauteur du sous-arbre droit de ce noeud diffèrent au plus de 1.

- C'est un noeud de F_{n+1}. Dans ce cas, l'hypothèse de récurrence assure que la hauteur du sous-arbre gauche et la hauteur du sous-arbre droit de ce noeud diffèrent au plus de 1.
- C'est la racine de F_{n+2}. Dans ce cas, le sous-arbre gauche est F_{n+1} donc sa hauteur est n, et le sous-arbre droit est F_n donc sa hauteur est $n-1$ (ou n si $n=0$). Donc la hauteur du sous-arbre gauche et la hauteur du sous-arbre droit diffèrent au plus de 1.

Question 5 – Pour $n \geqslant 0$, on note :

$$s_n = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$$

Montrons par récurrence sur $n \geqslant 0$ que s_n est le nombre de Strahler de F_n :

→ Si $n = 0$ ou $n = 1$, c'est vrai.

→ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que le nombre de Strahler de F_n est s_n et que le nombre de Strahler de F_{n+1} est s_{n+1}. Montrons que le nombre de Strahler de F_{n+2} est s_{n+2} :

- Si n est pair alors $s_n = s_{n+1}$. Par définition, le nombre de Strahler de F_{n+2} est :

$$s_n + 1 = \lfloor n/2 \rfloor + 2 = n/2 + 2 = (n+2)/2 + 1 = \lfloor (n+2)/2 \rfloor + 1 = s_{n+2}$$

- Si n est impair alors $s_n = s_{n+1} - 1$. Par définition, le nombre de Strahler de F_{n+2} est :

$$\max(s_n, s_{n+1}) = s_{n+1} = \lfloor (n+1)/2 \rfloor + 1 = (n+1)/2 + 1 = \lfloor (n+2)/2 \rfloor + 1 = s_{n+2}$$