Exercice 1. Expressions régulières

Question 1 – On remarque que $\mathscr{L}(e_1)$ est l'ensemble de tous les mots sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Ainsi :

$$\mathscr{L}(e_2) \subset \mathscr{L}(e_1)$$

Pour l'autre inclusion, montrons par récurrence sur $|w|$ que si $w \in \mathscr{L}(e_1) = \Sigma^*$ alors $w \in \mathscr{L}(e_2)$. Soit $w \in \Sigma^*$, on suppose la propriété vraie pour tout $w' \in \Sigma^*$ tel que $|w'| < |w|$. On a deux cas :

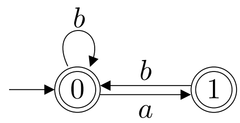
→ w ne contient pas de b, alors $w \in \mathscr{L}(a^*) \subset \mathscr{L}(e_2)$.

→ w contient un b. En coupant w juste après son premier b, on peut l'écrire comme une concaténation $w = w_1 \cdot w_2$ avec $w_1 \in \mathscr{L}(a^*b)$ et $w_2 \in \Sigma^*$. Par hypothèse de récurrence, $w_2 \in \mathscr{L}(e_2)$ et donc :

$$w \in \mathscr{L}(a^*b) \cdot \mathscr{L}(e_2) = \mathscr{L}\Big((a^*b)^+a^*\Big) \subset \mathscr{L}(e_2)$$

Question 2.a – On obtient :

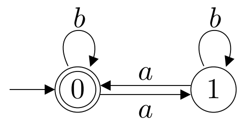
$$L_1 = \mathscr{L}\Big((b \mid ab)^*(a \mid \varepsilon)\Big)$$



Après lecture d'un mot u, l'automate est dans l'état $q \in \{0, 1\}$ où q est le nombre de a à la fin de u.

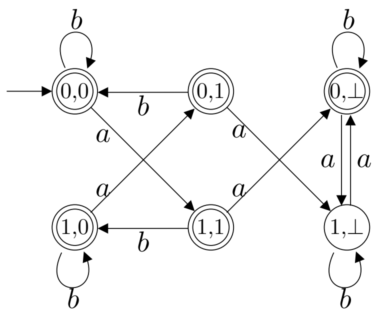
Question 2.b – On obtient :

$$L_2 = \mathscr{L}\Big((b \mid ab^*a)^*\Big)$$



Après lecture d'un mot u, l'automate est dans l'état $q \in \{0, 1\}$ où q est le résidu modulo 2 de $|u|_a$.

Question 2.c – Comme $L = L_1 \cup L_2$ et que l'ensemble des langages rationnels est stable par union, L est rationnel. De plus il est reconnu par l'automate produit cartésien :



Exercice 2.

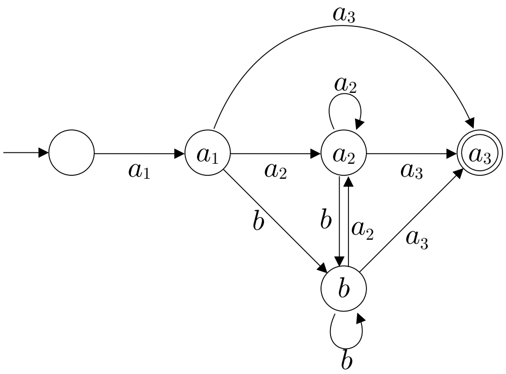
Question 1 – Soit $e = \varepsilon \mid e_1 \mid e_2$, alors :

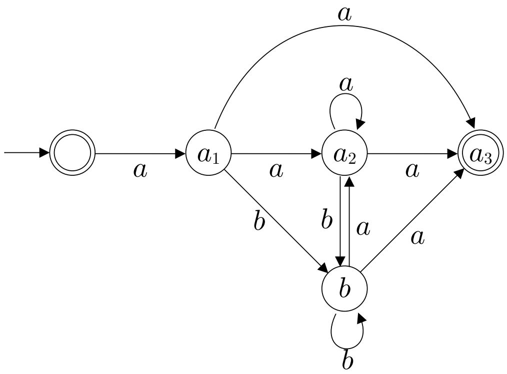
$$\begin{aligned} e_1 &= a \cdot (\varnothing \mid \varepsilon \mid a \mid b)^* \cdot a \equiv a \cdot (\varepsilon \mid a \mid b)^* \cdot a \equiv a \cdot (a \mid b)^* \cdot a \\ e_2 &= (a \mid \varepsilon) \cdot \varnothing \cdot \varepsilon^* \equiv \varnothing \end{aligned}$$

→ On a $e \equiv \varepsilon \mid f$ avec $f = a(a \mid b)^*a$ qui ne contient pas de symbole $\varnothing$ ou ε.

→ On renomme les lettres de f pour obtenir une expression régulière linéaire $f' = a_1(a_2 \mid b)^*a_3$.

→ On construit un automate local qui reconnaît $\mathscr{L}(f')$, puis $\mathscr{L}(e)$:



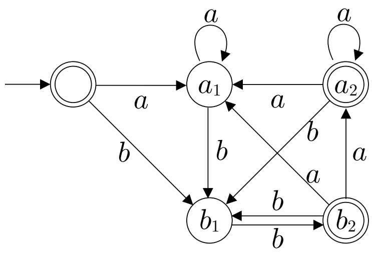


Question 2 – Soit $e = (a^*bba^*)^*$.

→ On remarque que l'expression régulière e ne contient pas de symbole $\varnothing$ ou ε.

→ On renomme les lettres de e pour obtenir une expression régulière linéaire $f = (a_1^*b_1b_2a_2^*)^*$.

→ On construit un automate local qui reconnaît $\mathscr{L}(e)$:



Question 3 – Pour $(i, j) \in Q^2$ et $E \subset Q$, on note $L_{i,j}$ l'ensemble des étiquettes des chemins entre i et j dont tous les sommets intermédiaires sont dans E. On a :

$$L_{1,5}(1,2,3,4,5) = L_{1,5}(1,2,3,4)L_{5,5}(1,2,3,4)^*$$

Pour $L_{1,5}(1,2,3,4)$:

$$\begin{aligned}
L_{1,5}(1,2,3,4) &= L_{1,5}(1,2,3) \cup L_{1,4}(1,2,3)L_{4,4}(1,2,3)^*L_{4,5}(1,2,3) \\
L_{1,5}(1,2,3) &= \varnothing \\
L_{1,4}(1,2,3) &= L_{1,1}(2,3)^*L_{1,4}(2,3) = \{\varepsilon\} \cdot a^*bb = a^*bb \\
L_{4,4}(1,2,3) &= L_{4,4}(1,3) \cup L_{4,2}(1,3)L_{2,2}(1,3)^*L_{2,4}(1,3) = \varnothing \cup (a^*b)\{\varepsilon\}^*\{b\} = a^*bb \\
L_{4,5}(1,2,3) &= a \\
L_{1,5}(1,2,3,4) &= a^*bb(a^*bb)^*a = (a^*bb)^+a
\end{aligned}$$

Pour $L_{5,5}(1,2,3,4)$:

$$\begin{aligned}
L_{5,5}(1,2,3,4) &= L_{5,5}(1,2,3) \cup L_{5,4}(1,2,3)L_{4,4}(1,2,3)^*L_{4,5}(1,2,3) \\
L_{5,5}(1,2,3) &= \{\varepsilon, a\} \\
L_{5,4}(1,2,3) &= a^*bb \\
L_{5,5}(1,2,3,4) &= (\varepsilon \mid a) \mid a^*bb(a^*bb)^*a = \varepsilon \mid a \mid (a^*bb)^+a = \varepsilon \mid (a^*bb)^*a
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}
L_{1,5}(1,2,3,4,5) &= (a^*bb)^+a(\varepsilon \mid (a^*bb)^*a)^* \\
&= (a^*bb)^+a((a^*bb)^*a)^*
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'automate reconnaît le langage } (a^*bb)^+a((a^*bb)^*a)^*}$$

Exercice 3.

Question 1 – On définit l'automate non déterministe $A' = (Q, \{e_1\}, \{e_2\}, \delta)$, alors pour tout $u \in \Sigma^*$:

$$\begin{aligned} u \in \mathscr{L}(A') &\Leftrightarrow e_2 \in \Delta^*(\{e_1\}, u) \\ &\Leftrightarrow u \in L_{e_1,e_2} \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathscr{L}(A') = L_{e_1,e_2}$ qui est bien rationnel.

Question 2 – Soit $A = (Q, I, F, \delta)$ un automate fini non déterministe qui reconnaît L. Avec les notations de la question 1, pour tout $w \in \Sigma^*$:

$$\begin{aligned} w \in L' &\Leftrightarrow \exists u \in \Sigma^*, \exists v \in \Sigma^* : w = vu, uv \in L \\ &\Leftrightarrow \exists q_0 \in I, \exists q_1 \in Q, \exists q_2 \in F, \exists u \in \Sigma^*, \exists v \in \Sigma^* : w = vu, q_1 \in \Delta^*(\{q_0\}, u), q_2 = \Delta^*(\{q_1\}, v) \\ &\Leftrightarrow \exists q_0 \in I, \exists q_1 \in Q, \exists q_2 \in F, \exists u \in L_{q_0,q_1}, \exists v \in L_{q_1,q_2} : w = vu \\ &\Leftrightarrow \exists q_0 \in I, \exists q_1 \in Q, \exists q_2 \in F, w \in L_{q_1,q_2} \cdot L_{q_0,q_1} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$L' = \bigcup_{q_0 \in I} \bigcup_{q_1 \in Q} \bigcup_{q_2 \in F} L_{q_1,q_2} \cdot L_{q_0,q_1}$$

Étant donné que l'ensemble des langages rationnels est stable par union finie et concaténation, L' est rationnel.

Exercice 4.

$\boxed{\textbf{Pour } L_1}$ Supposons par l'absurde que L_1 soit rationnel. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ l'entier donné par le lemme de l'étoile. Alors $a^n b^n \in L_1$. De plus, par le lemme de l'étoile, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$a^{n-m} a^{km} b^n \in L_1$$

Pour $k = 2$, on obtient $a^{n+m} b^n \in L_1$ ce qui constitue une contradiction.

$\boxed{\textbf{Pour } L_1'}$ On a :

$$L_1 = \{a, b\}^* \setminus L_1'$$

Ainsi, si L_1' est rationnel, alors L_1 est rationnel, ce qui est faux par la question précédente.

$\boxed{\textbf{Pour } L_2}$ Supposons par l'absurde que L_2 soit rationnel. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ l'entier donné par le lemme de l'étoile. Alors $a^{n^2} \in L_2$. De plus, par le lemme de l'étoile, il existe $m \in [\![1, n]\!]$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$a^{n^2-m} a^{km} \in L_2$$

Pour $k = 2$, on obtient $a^{n^2+m} \in L_2$. Or $n^2 < n^2 + m < (n+1)^2$, d'où la contradiction.

Exercice 5. Racine d'un langage

Question 1 –

$$\boxed{\text{On a } \sqrt{ab^*} = \varnothing}$$

En effet, supposons par l'absurde qu'il existe $u \in \sqrt{ab^*}$. Alors $u^2 \in \mathscr{L}(ab^*)$, c'est à dire qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u^2 = ab^n$. Ainsi, la première lettre de u est un a, et donc u^2 contient deux fois la lettre a ; ce qui constitue une contradiction.

$$\boxed{\text{On a } \sqrt{(ab)^*} = (ab)^*}$$

Montrons le par double inclusion :

($\supset$) S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u = (ab)^n$, alors $u^2 = (ab)^{2n} \in (ab)^*$ et donc $u \in \sqrt{(ab)^*}$.

($\subset$) Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u^2 = (ab)^n$.
Supposons par l'absurde que n est impair, alors u est à la fois égal à la première moitié de $(ab)^n$ et à sa deuxième moitié :

$$u = (ab)^{(n-1)/2}a \qquad \text{et} \qquad u = b(ab)^{(n-1)/2}$$

On obtient $u \neq u$, ce qui constitue une contradiction.
Ainsi, n est pair et donc $u = (ab)^{n/2} \in \mathscr{L}\Big((ab)^*\Big)$.

$$\boxed{\text{Avec le même genre de raisonnement, on obtient } \sqrt{ab^*a} = a}$$

Question 2 – On a $\boxed{L \subset \sqrt{L^2}}$. En effet, si $u \in L$, alors $u^2 \in L^2$ et donc $u \in \sqrt{L^2}$

En revanche, $\boxed{\text{l'autre inclusion n'est pas nécessairement vraie}}$. Par exemple avec $L = \{\varepsilon, aa\}$, on obtient :

$$L^2 = \{\varepsilon, aa, aaaa\} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{L^2} = \{\varepsilon, a, aa\}$$

Question 3.a – $\boxed{\text{Cette implication est vraie.}}$

On suppose que L est rationnel. Soit $A = (Q, q_0, F, \delta)$ un automate fini détermiste tel que $L = \mathscr{L}(A)$ et δ^* sa fonction de transition étendue aux mots. En utilisant les notations de l'exercice 3 :

$$\begin{aligned}
u \in \sqrt{L} &\Leftrightarrow u^2 \in L \\
&\Leftrightarrow \delta^*\Big(\delta^*(q_0, u), u\Big) \in F \\
&\Leftrightarrow \exists q \in Q, \exists q_1 \in F : \delta^*(q_0, u) = q \text{ et } \delta^*(q, u) = q_1 \\
&\Leftrightarrow \exists q \in Q, \exists q_1 \in F : u \in L_{q_0,q} \cap L_{q,q_1}
\end{aligned}$$

Étant donné que l'ensemble des langages rationnels est stable par union et intersection finie, $\sqrt{L}$ est rationnel :

$$\sqrt{L} = \bigcup_{q \in Q} \bigcup_{q_1 \in F} L_{q_0,q} \cap L_{q,q_1}.$$

Question 3.b – $\boxed{\text{Cette implication est fausse.}}$

Soit $L = \Big\{a^n b^n : n \in \mathbb{N}\Big\}$ et montrons que $\sqrt{L} = \{\varepsilon\}$. Supposons par l'absurde disposer d'un mot $u \in \Sigma^+$ avec $u \in \sqrt{L}$. Alors, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $uu = a^n b^n$. Ainsi, la première lettre de u est un a qui se décompose donc en $u = au'$. On obtient $au'au' = a^n b^n$, donc $au'a$ est un préfixe de a^n et donc u' ne contient que des a ; ce qui constitue une contradiction.

Exercice 6.

Soit $A = (Q, I, F, \delta)$ un automate non déterministe qui reconnaît L.

$$\boxed{\text{Le langage } \overline{L} \text{ est rationnel}}.$$

On note $\overline{A}$ l'automate non déterministe dont le graphe est le même que celui de A sauf que :

→ Les états initiaux et finaux de A et $\overline{A}$ on été échangés.

→ La direction des arcs a été inversée.

Formellement $\overline{A} = (Q', I', F', \delta')$ où :

$$Q' = Q \qquad\qquad I' = F \qquad\qquad F' = I$$

et pour tout $e_1 \in Q^2$ et tout $a \in \Sigma$:

$$\delta'(e_1, a) = \Big\{ e_2 \in Q : e_1 \in \delta(e_2, a) \Big\}$$

Par construction, pour tout $(e_1, a, e_2) \in Q \times \Sigma \times Q$, la transition $e_1 \xrightarrow{a} e_2$ apparaît dans A si et seulement si la transition $e_2 \xrightarrow{a} e_1$ apparaît dans $\overline{A}$. Ainsi, pour tout $(q_0, \dots, q_n) \in Q^{n+1}$ et tout $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \Sigma^n$:

$$q_0 \in I,\ q_n \in F \text{ et } q_0 \xrightarrow{A, a_0} q_1 \xrightarrow{A, a_1} \dots q_{n-1} \xrightarrow{A, a_{n-1}} q_n$$

$$\Leftrightarrow$$

$$q_n \in I',\ q_0 \in F' \text{ et } q_n \xrightarrow{\overline{A}, a_{n-1}} q_{n-1} \xrightarrow{\overline{A}, a_{n-2}} \dots q_1 \xrightarrow{\overline{A}, a_0} q_0$$

On en déduit que pour tout $w \in \Sigma^*$:

$$w \text{ est reconnu par } A. \Leftrightarrow \overline{w} \text{ est reconnu par } \overline{A}.$$

$$\boxed{\text{Les langages } L_1 \text{ et } L_2 \text{ sont rationnels}}$$

Pour le montrer, on utilise les notations de l'exercice 3. On remarque que pour tout mot w :

$$\begin{aligned} w \in L_2 &\Leftrightarrow w\overline{w} \in L \\ &\Leftrightarrow \exists q_1 \in I, \exists q_2 \in Q, \exists q_3 \in F : w \in L_{q_1,q_2} \text{ et } \overline{w} \in L_{q_2,q_3}. \\ &\Leftrightarrow \exists q_1 \in I, \exists q_2 \in Q, \exists q_3 \in F : w \in L_{q_1,q_2} \text{ et } w \in \overline{L_{q_2,q_3}}. \\ &\Leftrightarrow w \in \bigcup_{q_1 \in I} \bigcup_{q_2 \in Q} \bigcup_{q_3 \in F} L_{q_1,q_2} \cap \overline{L_{q_2,q_3}} \end{aligned}$$

Le langage situé à droite de l'équivalence est défini par des unions et intersections finies de langages rationnels. Par les propriétés de stabilités de l'ensemble de langages rationnels, L_2 est rationnel.

Pour L_1, on utilise le même raisonnement pour montrer que (en réalité $L_1 = \sqrt{L}$) :

$$L_1 = \bigcup_{q_1 \in I} \bigcup_{q_2 \in Q} \bigcup_{q_3 \in F} L_{q_1,q_2} \cap L_{q_2,q_3}$$

$$\boxed{\text{En fonction de } L \text{, les langage } L_3 \text{ et } L_4 \text{ peuvent être rationnels ou non.}}$$

Par exemple, si L est le langage rationnel $L = \mathscr{L}(a^*)$, alors $L_3 = L_4 = \mathscr{L}((aa)^*)$ qui est rationnel.

En revanche si on prend $L = \mathscr{L}(a^*b)$, alors $L_3 = \{a^n bba^n : n \in \mathbb{N}\}$. Supposons par l'absurde que L_3 soit rationnel. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ l'entier donné par le lemme de l'étoile. Alors $(a^n b)^2 \in L_3$. De plus, par le lemme de l'étoile, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$a^{n-m} a^{km} ba^n b \in L_3$$

Pour $k = 2$, on obtient $a^{n+m} ba^n b \in L_3$ ce qui constitue une contradiction.

Pour L_4, la preuve est similaire avec le mot $a^n bba^n$.

Exercice 7.

Question 1 – $\boxed{\text{La quantité } M = 2^{|\Sigma|} \text{ convient.}}$

⋆ Montrons par récurrence sur $|\Sigma|$ que pour tout mot $u \in \Sigma^*$ de longueur $|u| \geqslant 2^{|\Sigma|}$, u admet un facteur double.

→ Initialisation. Si $|\Sigma| = 1$, alors Σ est réduit à une lettre notée a. Un mot u sur Σ est de la forme a^m et si $m \geqslant 2$, alors u est double ; d'où le résultat.

→ Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété vraie pour tout alphabet de cardinal n. Soit Σ un alphabet de cardinal $n+1$ et $u \in \Sigma^*$ un mot de longueur au moins $2^{|\Sigma|} = 2 \times 2^n$. Montrons que u admet un facteur double.

Si u est double, comme u est facteur de lui-même, la propriété est vérifiée. Sinon, il existe $a \in \Sigma$ telle que $|u|_a = 1$. On définit l'alphabet $\Sigma' = \Sigma \setminus \{a\}$ qui est de cardinal n. Alors u est de la forme $u = vaw$ avec $u \in \Sigma'$ et $v \in \Sigma'$. De plus :

$$2 \times 2^n \leqslant |u| = 1 + |v| + |w|.$$

Comme $|v|$ et $|w|$ sont des entiers, on a $|v| \geqslant 2^n$ ou $|w| \geqslant 2^n$. Ainsi, par l'hypothèse de récurrence, v ou w admet un facteur double, d'où le résultat.

⋆ Montrons par récurrence sur $|\Sigma|$ qu'il existe un mot u de longueur $|u| = 2^{|\Sigma|} - 1$ tel que u n'admette pas de facteur double.

→ Initialisation. Si $|\Sigma| = 1$, alors Σ est réduit à une lettre notée a. Le mot $u = a$ convient.

→ Hérédité. Soit Σ un alphabet tel que la propriété soit vraie, soit $a \notin \Sigma$ une nouvelle lettre et $\Sigma' = \Sigma \uplus \{a\}$. Par l'hypothèse de récurrence, il existe un mot $u \in \Sigma^*$ tel que $|u| = 2^{|\Sigma|} - 1$ qui n'admet pas de facteur double. Soit $u' = uau$, alors $|u'| = 2^{|\Sigma|+1} - 1 = 2^{|\Sigma'|} - 1$ et montrons que u' n'admet pas de facteur double.

Soit v un facteur de u', alors $|v|_a \in \{0, 1\}$. Si $|v|_a = 1$, alors v n'est pas double ar définition. Si $|v|_a = 0$, alors v est un facteur de u et n'est donc pas double par hypothèse de récurrence.

Question 2 – On note $a_1, \dots, a_n$ les lettres de l'alphabet. Pour chaque $k \in [\![1, n]\!]$, on note :

$$L_k = \Big(\Sigma \setminus \{a_k\}\Big)^* \cdot \{a_k\} \cdot \Big(\Sigma \setminus \{a_k\}\Big)^*$$

Alors, L_k est l'ensemble de tous les mots contenant exactement une fois la lettre a_k. Ainsi L est rationnel par stabilité de l'ensemble de langages rationnels :

$$L = \bigcap_{k=1}^{n} \Sigma^* \setminus L_k$$

Exercice 8. Réciproque du lemme de l'étoile

Question 1 – Montrons que $\mathcal{P}(L_0)$ est vérifiée pour $n = 1$. Soit $u \in L$ tel que $|u| \geqslant n = 1$ (c'est à dire que $u \neq \varepsilon$). Soit $x = \varepsilon$, y le préfixe de taille 1 de u et z le suffixe de taille $|u| - 1$ de u. On a bien :

$$u = xyz \qquad\qquad y \neq \varepsilon \qquad\qquad |xy| = 1 \leqslant n.$$

Pour la dernière propriété, on distingue plusieurs cas :

→ Si $u \in \{b\}^*$, alors $y = b$ (rappel : u est non vide) et $z \in \{b\}^*$. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $xy^kz \in \{b\}^* \subset L_0$.

→ Si $u \in \{a\}^+\{b\}^*$, alors $y = a$ et $z \in \{a\}^*\{b\}^*$. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $xy^kz \in \{a\}^*\{b\}^* \subset L_0$.

→ Si $u = b^p a^n b^n$ avec $p > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, alors $y = b$ et $z = b^{p-1}a^nb^n$. Ainsi pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$xy^kz = b^{k+p-1}a^nb^n \in \begin{cases} \{a\}^*\{b\}^* \subset L_0 \text{ si } k = 0 \text{ et } p = 1 \\ L_0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Question 2 – Supposons par l'absurde que L_0 soit rationnel. Par le lemme de Kleene, il existe un automate fini déterministe $A = (Q, q_0, F, \delta)$ qui reconnaît L_0. Soit $n = |Q|$ et $u = ba^n b^n \in L_0$. L'ensemble d'états :

$$Q_0 = \left\{\delta^*(q_0, ba^k), k \in [\![0, n]\!]\right\}$$

vérifie $Q_0 \subset Q$ et donc $|Q_0| \leqslant n$. En d'autres termes, il existe deux entiers (k_1, k_2) tels que $0 \leqslant k_1 < k_2 \leqslant n$ et :

$$\delta^*(q_0, ba^{k_1}) = \delta^*(q_0, ba^{k_2})$$

Si on pose $q_1 = \delta^*(q_0, ba^{k_1})$ et $q_2 = \delta^*(q_0, ba^n b^n) \in F$, alors dans l'automate A :

$$q_0 \xrightarrow{ba^{k_1}} q_1 \qquad\qquad q_1 \xrightarrow{a^{k_2-k_1}} q_1 \qquad\qquad q_1 \xrightarrow{a^{n-k_2}b^n} q_2 \in F$$

Ainsi, l'automate accepte le mot :

$$ba^{k_1}a^{n-k_2}b^n = ba^{k_1+n-k_2}b^n$$

C'est une contradiction car $k_1 - k_2 < 0$.

Exercice 9.

Soit $A = (Q, q_0, F, \delta)$ un automate fini détermiste qui reconnaît L. On définit $A' = (Q', I', F', \delta')$ l'automate fini non déterministe tel que :

$$Q' = Q \times \{0, 1\} \qquad\qquad I' = \{(q_0, 0)\} \qquad\qquad F' = F \times \{1\}$$

Pour tout $q \in Q$ et tout $a \in \Sigma$:

$$\begin{aligned}
\delta'\Big((q,0), a\Big) &= \Big\{(\delta(q,a), 0)\Big\} \cup \Big\{(\delta(q,b), 1) : b \in \Sigma \setminus \{a\}\Big\} \\
\delta'\Big((q,1), a\Big) &= \Big\{(\delta(q,a), 1)\Big\}
\end{aligned}$$

Exercice 10.

Soit $A = (Q, q_0, F, \delta)$ un automate fini déterministe complet qui reconnaît L et $q_1, q_2, \ldots, q_n$ ses différents états. Notez que $n = |Q|$ et $q_0 \in \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$.

Idée de la preuve. On construit un automate non déterministe A' tel que :

→ L'ensemble des états de A' est Q^{n+1}.

→ L'état initial de A' est $(q_0, q_1, \ldots, q_n)$.

→ Un état de l'automate est de la forme $(e_0, \ldots, e_n)$. Lors de la lecture d'un mot u, les $(n+1)$ composantes évoluent de manière indépendante. La composante d'indice $i = 0$ simule l'évolution de A sur u, et chaque composante d'indice $i \in [\![1, n]\!]$ permet de calculer tous les états accessibles à partir de l'état q_i dans A.

En d'autres termes, après lecture d'un mot $u \in \Sigma^*$, A' atteint tous les états de la forme $(e_0, \ldots, e_n)$ avec :

$$e_0 = \delta^*(q_0, u) \qquad \text{et} \qquad \forall i \in [\![1, n]\!] : e_i = \delta^*(q_i, v)$$

où v parcourt $\Sigma^{|u|}$.

Un mot u appartient à $\frac{1}{2}L$ si et seulement si A' atteint un état de la forme $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ où $e_i \in F$ avec $i \in [\![1, n]\!]$ l'indice tel que $e_0 = q_i$.

Preuve formelle. Soit $A' = (Q', I', F', \delta')$ l'automate fini non déterministe où :

$$Q' = Q^{n+1} \qquad I' = \Big\{(q_0, q_1, \dots, q_n)\Big\} \qquad F' = \bigcup_{i=1}^{n} \Big[\{q_i\} \times Q^{i-1} \times F \times Q^{n-i}\Big]$$

et pour tout $(e_0, e_1, \dots, e_n) \in Q^{n+1}$, pour tout $a \in \Sigma$:

$$\delta'\Big((e_0, e_1, \dots, e_n), a\Big) = \bigcup_{b \in \Sigma} \Big\{(\delta(e_0, a), \delta(e_1, b), \dots, \delta(e_n, b))\Big\}$$

Notons Δ'^* la fonction de transition étendue aux mots et aux ensembles d'états associée à A'. Par récurrence sur $|u|$, on peut montrer que :

$$\Delta'^*(I', u) = \bigcup_{v \in \Sigma^{|u|}} \Big\{(\delta^*(q_0, u), \delta^*(q_1, v), \dots, \delta^*(q_n, v))\Big\}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} u \in \mathscr{L}(A') &\Leftrightarrow \Delta'^*(I', u) \cap F' \neq \varnothing \\ &\Leftrightarrow \exists v \in \Sigma^{|u|}, \exists i \in [\![1, n]\!] : \delta^*(q_0, u) = q_i, \delta^*(q_i, v) \in F \\ &\Leftrightarrow \exists v \in \Sigma^{|u|} : \delta^*(q_0, uv) \in F \\ &\Leftrightarrow u \in \frac{1}{2} L \end{aligned}$$

En conclusion, A' reconnaît $\frac{1}{2}L$ qui est donc rationnel.

Exercice 11.

Question 1 – On a :

$$\boxed{ab\#abb = \Big\{ababb, aabbb, ababb, abbab\Big\}}$$

- $ab \# abb \longrightarrow \{a\}\ (b \# abb)$
  - $\longrightarrow \{ab\}\ (\varepsilon \# abb) \longrightarrow \{ababb\}$
  - $\longrightarrow \{aa\}\ (b \# bb)$
    - $\longrightarrow \{aab\}\ (\varepsilon \# bb) \longrightarrow \{aabbb\}$
    - $\longrightarrow \{aab\}\ (b \# b)$
      - $\longrightarrow \{aabb\}\ (\varepsilon \# b) \longrightarrow \{aabbb\}$
      - $\longrightarrow \{aabb\}\ (b \# \varepsilon) \longrightarrow \{aabbb\}$
- $ab \# abb \longrightarrow \{a\}\ (ab \# bb)$
  - $\longrightarrow \{aa\}\ (b \# bb) \longrightarrow \{aabbb\}$
  - $\longrightarrow \{ab\}\ (ab \# b)$
    - $\longrightarrow \{aba\}\ (b \# b) \longrightarrow \{ababb\}$
    - $\longrightarrow \{abb\}\ (ab \# \varepsilon) \longrightarrow \{abbab\}$

Question 2 – Soient $A_1 = (Q_1, q_1, F_1, \delta_1)$ et $A_2 = (Q_2, q_2, F_2, \delta_2)$ deux automates finis déterministes reconnaissant L_1 et L_2 repectivement. On note $A = (Q, I, F, \delta)$ l'automate non déterministe où :

$$Q = Q_1 \times Q_2 \qquad I = \{(q_1, q_2)\} \qquad F = F_1 \times F_2$$

Pour tout $(e_1, e_2) \in Q_1 \times Q_2$ et tout $a \in \Sigma$:

$$\delta\Big((e_1, e_2), a\Big) = \Big\{(\delta_1(e_1, a), e_2), (e_1, \delta_2(e_2, a)),\Big\}$$

Alors A reconnaît $L_1 \# L_2$.