

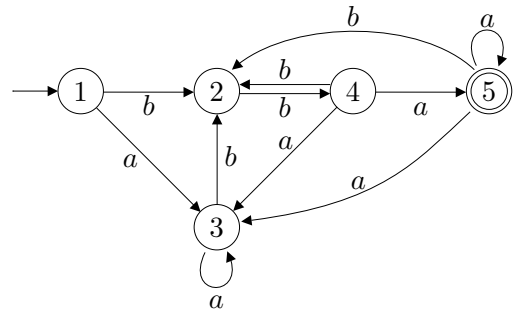
Exercice 1. Expressions régulières

1. Montrer que les expressions régulières $e_1 = (a \mid b)^*$ et $e_2 = (a^*b)^*a^*$ sont sémantiquement équivalentes.
2. Soit $\Sigma = \{a, b\}$. Pour chaque langage L décrit ci-dessus, donner une expression régulière e telle que $L = \mathcal{L}(e)$ ainsi qu'un automate déterministe reconnaissant L :
 - (a) L_1 l'ensemble des mots tels que a^2 n'est pas un facteur de u .
 - (b) L_2 l'ensemble des mots u tels que $|u|_a \equiv 0 \pmod 2$.
 - (c) Le langage $L = L_1 \cup L_2$.

Exercice 2.

1. Construire l'automate de Glushkov associé à $\epsilon \mid e_1 \mid e_2$ où :

$$e_1 = a(\emptyset \mid \epsilon \mid a \mid b)^*a \quad \text{et} \quad e_2 = (a \mid \epsilon) \emptyset \epsilon^*$$
2. Construire l'automate de Glushkov associé à $(a^*bba^*)^*$.
3. Construire une expression régulière associée à l'automate ci-contre.



Exercice 3.

1. Soit $A = (Q, I, F, \delta)$ un automate fini non déterministe et Δ^* la fonction de transition étendue aux mots et aux ensembles d'états. Montrer que pour tout $(e_1, e_2) \in Q^2$, le langage L_{e_1, e_2} est rationnel :

$$L_{e_1, e_2} = \{u \in \Sigma^* : e_2 \in \Delta^*({e_1}, u)\}$$

2. Soit L un langage rationnel. Montrer que le langage $L' = \{uv : vu \in L\}$ est rationnel.

Exercice 4.

Montrer que ces langages ne sont pas rationnels :

$$L_1 = \{u \in \{a, b\}^* : |u|_a = |u|_b\} \quad L'_1 = \{u \in \{a, b\}^* : |u|_a \neq |u|_b\} \quad L_2 = \{a^{n^2} : n \in \mathbb{N}\}$$

Exercice 5. Racine d'un langage

Soit Σ un alphabet et $L \subset \Sigma^*$ un langage. On définit $\sqrt{L} = \{u \in \Sigma : u^2 \in L\}$.

1. Déterminer $\sqrt{ab^*}$, $\sqrt{(ab)^*}$ et $\sqrt{ab^*a}$.
2. Comparer L et $\sqrt{L^2}$.
3. (a) Si L est rationnel, \sqrt{L} est-il nécessairement rationnel ?
 (b) Si \sqrt{L} est rationnel, L est-il nécessairement rationnel ?

Exercice 6.

Pour tout mot $u = u_1u_2 \dots u_n \in \Sigma^*$, on note $\bar{u} = u_nu_{n-1} \dots u_1$ le mot u écrit à l'envers. Soit L un langage rationnel. Parmi les langages suivants, déterminer lesquels sont nécessairement rationnels :

$$\begin{aligned} \bar{L} &= \{u \in \Sigma^* : \bar{u} \in L\} & L_1 &= \{u \in \Sigma^* : uu \in L\} & L_2 &= \{u \in \Sigma^* : u\bar{u} \in L\} \\ L_3 &= \{uu : u \in L\} & L_4 &= \{u\bar{u} : u \in L\} \end{aligned}$$

Exercice 7.

Soit Σ un alphabet et $u \in \Sigma^*$ un mot. On dit que u est **double** si pour tout $a \in \Sigma$, $|u|_a = 0$ ou $|u|_a \geq 2$.

1. Déterminer une quantité $M \in \mathbb{N}^*$ telle que :
 - Pour tout mot u , si $|u| \geq M$ alors u admet un facteur double non vide.
 - Il existe un mot u tel que $|u| = M - 1$ et u n'admet pas de facteur double non vide.
2. Soit L l'ensemble des mots doubles. Le langage L est-il rationnel ?

Exercice 8. Réciproque du lemme de l'étoile

Étant donné un langage L , on note $\mathcal{P}(L)$ la propriété :

$\mathcal{P}(L)$: Il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $u \in L$, si $|u| \geq n$, alors il existe trois mots x, y, z vérifiant :

$$u = xyz \quad y \neq \epsilon \quad |xy| \leq n \quad \forall k \in \mathbb{N} : xy^kz \in L.$$

Rappelons que le "lemme de l'étoile" stipule que si L est rationnel, alors $\mathcal{P}(L)$ est vraie. Le but de l'exercice est de montrer que la réciproque du lemme de l'étoile est fautive en prenant comme contre-exemple :

$$L_0 = \{a\}^*\{b\}^* \cup \{b^p a^n b^n : p \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}\}$$

1. Montrer $\mathcal{P}(L_0)$.
2. Montrer que L_0 n'est pas rationnel.

Exercice 9.

Soit L un langage rationnel et L' l'ensemble des mots qui diffèrent d'un mot de L d'exactly une lettre. Montrer que L' est rationnel.

Exercice 10.

Soit L un langage rationnel, montrer que le langage suivant est rationnel :

$$\frac{1}{2}L = \{u \in \Sigma^* : \exists v \in \Sigma^*, |u| = |v| \text{ et } uv \in L\}$$

Exercice 11.

Soient u et v deux mots. On appelle **mélange** de u et v , et on note $u \# v$ le langage défini par :

$$u \# \epsilon = \{u\} \quad \epsilon \# v = \{v\} \quad \forall (a, b) \in \Sigma^2 : au \# bv = \{a\}(u \# bv) \cup \{b\}(au \# v')$$

1. Déterminer $ab \# abb$

Soient L_1 et L_2 deux langages. On appelle **mélange** de L_1 et L_2 le langage :

$$L_1 \# L_2 = \bigcup_{u_1 \in L_1} \bigcup_{u_2 \in L_2} u_1 \# u_2$$

2. Montrer que le mélange de deux langages rationnels est rationnel.