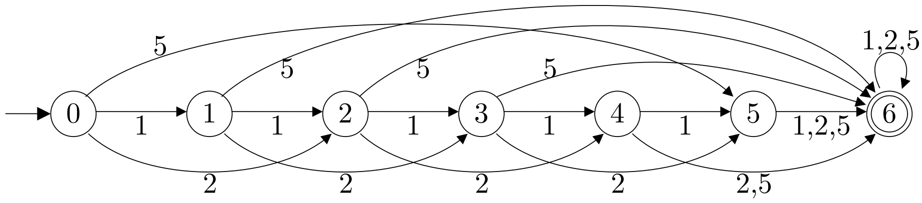
Exercice 1. Distributeur automatique

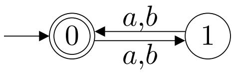
L'ensemble des états sera $Q = [\![0;6]\!]$. Après lecture d'un mot $u \in \Sigma^*$, l'automate sera :

- Dans un état $s \in [\![0;5]\!]$ si la somme des lettres de u est égale à s.
- Dans l'état 6 si la somme de lettres de u est supérieure ou égale à 6.



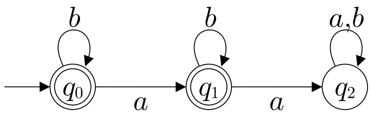
Exercice 2. Construction d'automates déterministes

Question 1 – L'automate possède deux états : $Q = \{0, 1\}$. Après lecture d'un mot u, l'automate est dans l'état $r \in Q$ où r est le reste dans la division euclidienne de $|u|$ par 2.

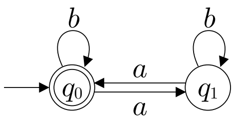


Question 2 – L'automate possède trois états : $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$. Après lecture d'un mot u, l'automate est dans l'état :

- q_0 lorsque u ne contient pas de a.
- q_1 lorsque u contient exactement un a.
- q_2 lorsque u contient au moins deux a.

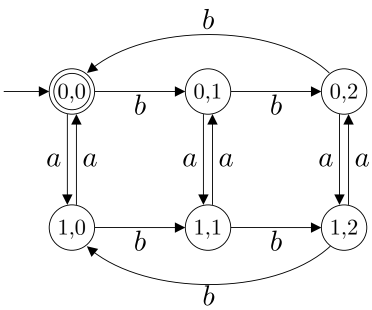


Question 3 – L'automate possède deux états : $Q = \{0, 1\}$. L'état $r \in Q$ signifie que le mot lu u vérifie $r \equiv |u|_a \mod 2$.

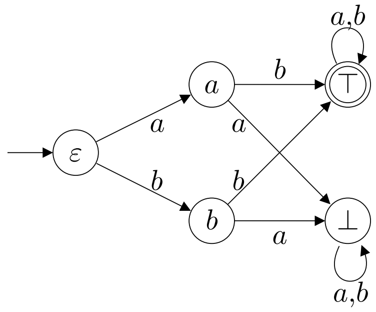


Question 4 – L'automate possède 6 états : $Q = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. L'état $(r_1, r_2) \in Q$ signifie que le mot lu u vérifie :

$$r_1 \equiv |u|_a \mod 2 \qquad\qquad r_2 \equiv |u|_b \mod 3$$

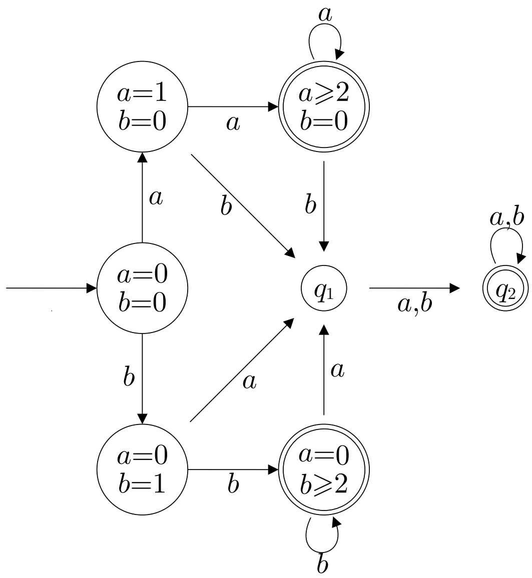


Question 5 –

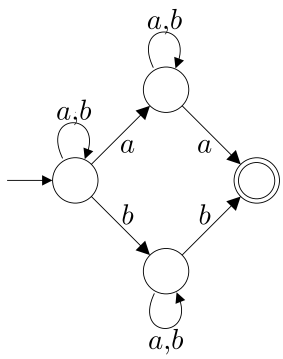


Question 6 – On remarque que si u possède au moins un a et un b, alors $u \cdot v$ appartient à L pour tout $v \in \Sigma^+$. Après lecture d'un mot u, l'automate sera dans l'état :

- q_1 lorsque u contient au moins un a est un b et n'appartient pas à L (c'est à dire qu'il est de la forme $\{a\}^+b$ ou $\{b\}^+a$).
- q_2 lorsque u contient au moins un a, un b et appartient à L.
- Les autres états indiquent le nombre de a et de b dans u.

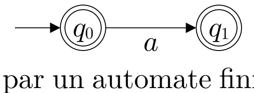


Remarque. On pourrait également obtenir cet automate en déterminisant l'automate non déterministe :



Exercice 3.

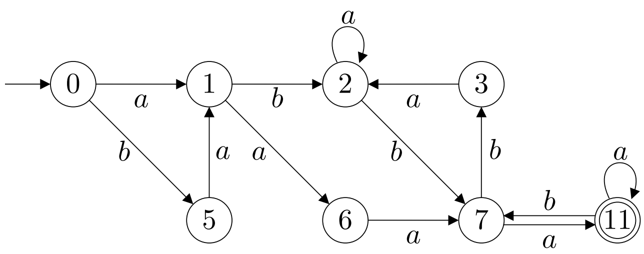
Soit $L = \{\epsilon, a\}$. Ce langage est reconnu par l'automate fini déterministe suivant :



Supposons par l'absurde que L soit reconnu par un automate fini déterministe A avec un seul état acceptant. Comme A accepte le mot ϵ, l'état initial q_0 est acceptant (c'est donc le seul). Comme A accepte également le mot a, alors A contient une transition de q_0 vers lui-même étiquetée par a. Mais alors, A accepte tous les mots de $\{a\}^*$, ce qui constitue une contradiction.

Exercice 4. Émondage

Les états accessibles sont $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11$ et les états co-accessibles sont $0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11$. Il suffit donc de recopier l'automate en ne gardant que les états $0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 11$:

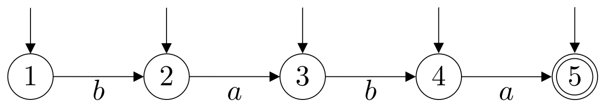


Exercice 5. Automates non déterministes

Question 1.a – On construit un automate avec cinq états $Q = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Après lecture du mot $u \in \Sigma^*$, l'ensemble des états possibles $\Delta^*(I, u)$ vérifie :

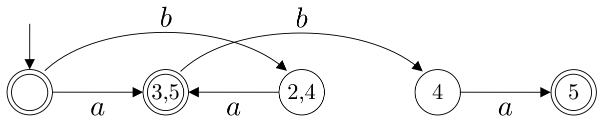
$1 \in \Delta^*(I, u) \Leftrightarrow u \in \{\epsilon\}$ $\quad 2 \in \Delta^*(I, u) \Leftrightarrow u \in \{\epsilon, b\}$ $\quad 3 \in \Delta^*(I, u) \Leftrightarrow u \in \{\epsilon, b, ba\}$

$4 \in \Delta^*(I, u) \Leftrightarrow u \in \{\epsilon, b, ba, bab\}$ $\quad 5 \in \Delta^*(I, u) \Leftrightarrow u \in \{\epsilon, b, ba, bab, baba\}$



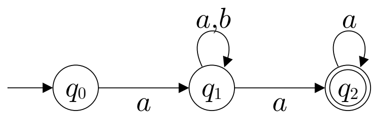
Question 1.b – Construisons les transitions de l'automate des parties :

	a	b
$\{1, 2, 3, 4, 5\}$	$\{3, 5\}$	$\{2, 4\}$
$\{3, 5\}$		$\{4\}$
$\{2, 4\}$	$\{3, 5\}$	
$\{4\}$	$\{5\}$	
$\{5\}$		



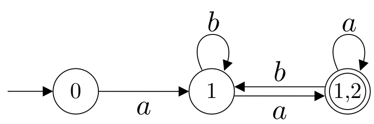
Question 2.a – L'automate possède trois états : $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$. Après lecture du mot $u \in \Sigma^*$, l'ensemble des états possibles $\Delta^*(I, u)$ vérifie :

$q_0 \in \Delta^*(I, u) \Leftrightarrow u \in \{\epsilon\}$ $\quad q_1 \in \Delta^*(I, u) \Leftrightarrow u \in \{a\}\{a, b\}^*$ $\quad q_2 \in \Delta^*(I, u) \Leftrightarrow u \in \{a\}\{a, b\}^*\{a\}$



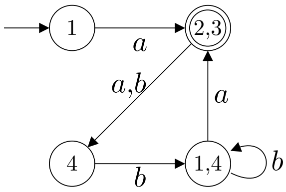
Question 2.b – Construisons les transitions de l'automate des parties :

	a	b
$\{q_0\}$	$\{q_1\}$	
$\{q_1\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_1\}$
$\{q_1, q_2\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_1\}$

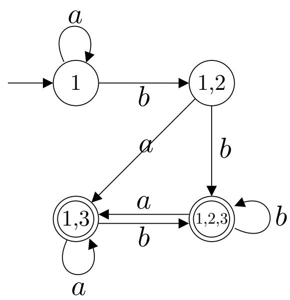


Question 3 –

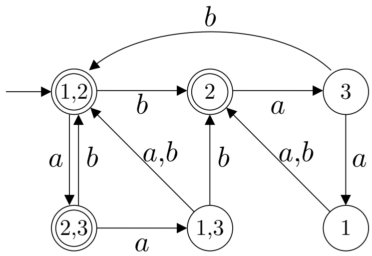
	a	b
$\{1\}$	$\{2,3\}$	
$\{2,3\}$	$\{4\}$	$\{4\}$
$\{4\}$		$\{1,4\}$
$\{1,4\}$	$\{2,3\}$	$\{1,4\}$



	a	b
$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1,2\}$
$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{1,2,3\}$
$\{1,3\}$	$\{1,3\}$	$\{1,2,3\}$
$\{1,2,3\}$	$\{1,3\}$	$\{1,2,3\}$



	a	b
$\{1,2\}$	$\{2,3\}$	$\{2\}$
$\{2,3\}$	$\{1,3\}$	$\{1,2\}$
$\{2\}$	$\{3\}$	
$\{1,3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$
$\{3\}$	$\{1\}$	$\{1,2\}$
$\{1\}$	$\{2\}$	$\{2\}$



Exercice 6. Langage singleton

Question 1 – Comme $\mathscr{L}(A) \neq \varnothing$, on peut considérer $u = u_1 u_2 \dots u_n$ un mot de longueur minimale parmi les éléments de $\mathscr{L}(A)$. Supposons par l'absurde que $n \geqslant \operatorname{card}(Q)$. Comme $u \in \mathscr{L}(A)$, il existe un chemin étiqueté par u entre un état initial $q_0 \in I$ et un état final $q_1 \in F$. Ce chemin passe au moins par $n+1 \geqslant \operatorname{card}(Q)+1$ états, dont au moins deux sont égaux. Ainsi, il existe un état $q \in Q$ et deux entiers $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$ avec $i < j$ tels que dans A :

$$q_0 \xrightarrow{u_1 \dots u_i} q, \qquad q_0 \xrightarrow{u_1 \dots u_j} q, \qquad q \xrightarrow{u_{j+1} \dots u_n} q_1.$$

Soit $u' = u_1 \dots u_i u_{j+1} \dots u_n$, alors d'après ce qui précède, $q_0 \xrightarrow{u'} q_1$ et donc $u' \in \mathscr{L}(A)$ ce qui contredit la minimalité de u.

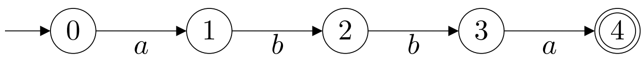
Question 2.a – Soit $u = u_1 \dots u_n \in \Sigma^n$. On définit l'automate fini déterministe $A = (Q, q_0, F, \delta)$ où :

$$Q = [\![0,n]\!] \qquad q_0 = 0 \qquad F = \{n\}$$

et pour tout $i \in [\![0,n]\!]$ et tout $a \in \Sigma$:

$$\delta(i,a) = \begin{cases} i+1 \text{ si } i < n \text{ et } a = u_i \\ \text{n'est pas défini sinon} \end{cases}$$

Par exemple, pour $u = abba$, on obtient :



Le seul chemin dans cet automate de l'état initial 0 à l'état final n est étiqueté par u. D'où le résultat.

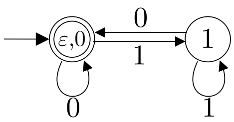
Question 2.b – Il suffit d'appliquer la question 1 au langage $\{u\}$.

Exercice 7. Écriture binaire

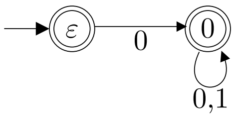
Question 1 –

⋆ Pour A_2. $u \in A_2$ si et seulement si $u = \epsilon$ ou la dernière lettre de u est un 0. On construit un automate avec deux états ; après lecture d'un mot u, l'automate sera :

- Dans l'état $(\epsilon, 0)$ si $u = \epsilon$ ou la dernière lettre de u est 0.
- Dans l'état 1 sinon – c'est à dire si la dernière lettre de u est 1.

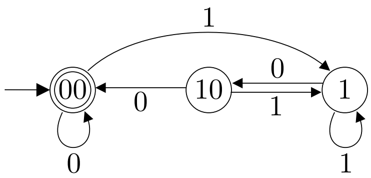


⋆ Pour B_2. $u \in B_2$ si et seulement si $u = \epsilon$ ou commence par 0 :

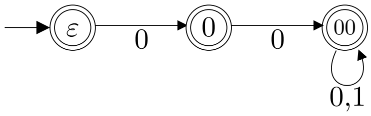


⋆ Pour A_4. $u \in A_4$ si et seulement si $u \in \{\epsilon, 0\}$ ou si ses deux dernières lettres sont 00. On construit un automate avec trois états ; après lecture d'un mot u, l'automate sera :

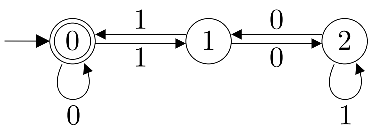
- Dans l'état 1 si sa dernière lettre est 1.
- Dans l'état 10 si ses deux dernières lettres sont 10.
- Dans l'état 00 sinon – c'est à dire si $u \in \{\epsilon, 0\}$ ou si ses deux dernières lettres sont 00.



⋆ Pour B_4. $u \in B_4$ si et seulement si $u \in \{\epsilon, 0\}$ ou si ses deux premières lettres sont 00.



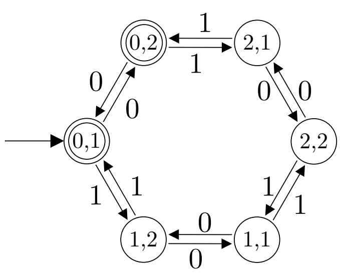
⋆ Pour A_3. L'ensemble des états sera $Q = \{0, 1, 2\}$; après lecture d'un mot u, l'automate sera dans l'état $r \in Q$ si et seulement si r est le reste dans la division euclidienne de $b_1(u)$ par 3.



⋆ Pour B_3. On remarque que $2^n \equiv 1 \mod 3$ si n est pair et $2^n \equiv 2 \mod 3$ si n est impair. On construit un automate avec 6 états $Q = \{0, 1, 2\} \times \{1, 2\}$. Après lecture d'un mot $u \in \Sigma^+$, l'automate sera dans l'état $(\alpha, \beta) \in Q$ où :

→ $\alpha \in \{0, 1, 2\}$ est le reste dans la division euclidienne de u par 3.

→ $\beta \in \{1, 2\}$ est le reste dans la division euclidienne de $2^{|u|}$ par 3.



Remarque. En réalité : $A_3 = B_3$. En effet, si $u = u_1 \dots u_n$, alors :

$$\begin{aligned} b_1(u) &\equiv \sum_{i=1}^{n} u_i(-1)^{n-i} \mod 3 \\ &\equiv \sum_{i=1}^{n} u_i(-1)^{n+i} \mod 3 \\ &\equiv (-1)^{n+1} b_2(u) \mod 3 \end{aligned}$$

Question 2 – Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On définit $A = (Q, q_0, F, \delta)$ l'automate fini déterministe où :

$$Q = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \qquad q_0 = 0 \qquad F = \{0\}.$$

et où la fonction δ est définie par :

$$\forall r \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} : \begin{cases} \delta(r, 0) = 2r \\ \delta(r, 1) = 2r + 1 \end{cases}$$

⋆ Montrons par récurrence sur $|u|$ que :

$$\forall u \in \Sigma^* : \delta^*(q_0, u) = b_1(u) \mod k$$

Si $|u| = 0$, alors $u = \epsilon$, donc :

$$\delta^*(q_0, u) = q_0 = 0 \qquad b_1(u) = 0$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose la propriété vraie pour $u \in \Sigma^n$ et on la montre pour $u \cdot 0$ et $u \cdot 1$.

$$\begin{aligned} \delta^*(q_0, u0) &= \delta(\delta^*(q_0, u), 0) \\ &= \delta(b_1(u) \mod k, 0) \\ &= 2b_1(u) \mod k \\ &= b_1(u \cdot 0) \mod k \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \delta^*(q_0, u1) &= \delta(\delta^*(q_0, u), 1) \\ &= \delta(b_1(u) \mod k, 1) \\ &= 2b_1(u) + 1 \mod k \\ &= b_1(u \cdot 1) \mod k \end{aligned}$$

⋆ En conclusion :

$$\begin{aligned} u \in \mathscr{L}(A) &\Leftrightarrow \delta^*(q_0, u) = 0 \\ &\Leftrightarrow b_1(u) = 0 \mod k \\ &\Leftrightarrow u \in A_k \end{aligned}$$

Question 3 – Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On définit $A = (Q, q_0, F, \delta)$ l'automate déterministe où :

$$Q = (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^2 \qquad q_0 = (0, 1) \qquad F = \{0\} \times \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$$

et où la fonction δ est définie par :

$$\forall (\alpha, \beta) \in (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^2 : \begin{cases} \delta\Big((\alpha, \beta), 0\Big) = (\alpha, 2\beta) \\ \delta\Big((\alpha, \beta), 1\Big) = (\alpha + \beta, 2\beta) \end{cases}$$

⋆ Montrons par récurrence sur $|u|$ que :

$$\forall u \in \Sigma^* : \delta^*(q_0, u) = \Big(b_2(u) \mod k, 2^{|u|} \mod k\Big)$$

Si $|u| = 0$, alors $u = \epsilon$, donc :

$$\delta^*(q_0, u) = q_0 = (0, 1) \qquad \Big(b_2(u) \mod k, 2^{|u|} \mod k\Big) = (0, 1)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose la propriété vraie pour $u \in \Sigma^n$ et on la montre pour $u \cdot 0$ et $u \cdot 1$.

$$\begin{aligned} \delta^*(q_0, u0) &= \delta(\delta^*(q_0, u), 0) \\ &= \delta\Big((b_2(u) \mod k, 2^{|u|} \mod k), 0\Big) \\ &= (b_2(u) \mod k, 2^{|u|+1} \mod k) \\ &= (b_2(u \cdot 0) \mod k, 2^{|u|+1} \mod k) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \delta^*(q_0, u1) &= \delta(\delta^*(q_0, u), 1) \\ &= \delta\Big((b_2(u) \mod k, 2^{|u|} \mod k), 1\Big) \\ &= (b_2(u) + 2^{|u|} \mod k, 2^{|u|+1} \mod k) \\ &= (b_2(u \cdot 1) \mod k, 2^{|u|+1} \mod k) \end{aligned}$$

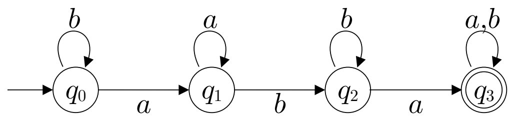
$\star$ En conclusion :

$$\begin{aligned} u \in \mathscr{L}(A) &\Leftrightarrow \delta^*(q_0, u) \in F \\ &\Leftrightarrow b_2(u) = 0 \mod k \\ &\Leftrightarrow u \in A_k \end{aligned}$$

Exercice 8. Facteurs, sous-mots et préfixes

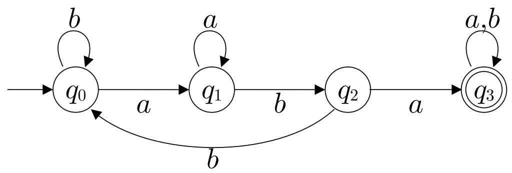
Question 1 – L'automate possède quatre états :

- q_0 lorsque a n'est pas un sous-mot du mot lu.
- q_1 lorsque a est un sous-mot du mot lu, mais pas ab.
- q_2 lorsque ab est un sous-mot du mot lu, mais pas aba.
- q_3 lorsque aba est un sous-mot du mot lu.

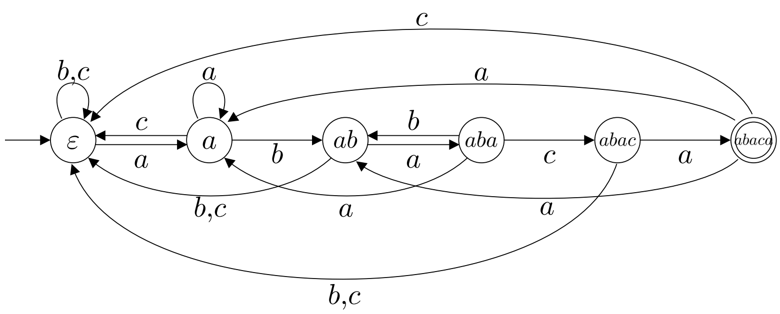


Question 2 – L'automate possède quatre états :

- q_3 lorsque aba est un facteur du mot lu.
- q_2 lorsque aba n'est pas un facteur du mot lu, mais qu'il se termine par ab.
- q_1 lorsque aba n'est pas un facteur du mot lu, mais qu'il se termine par a.
- q_0 dans tous les autres cas.



Question 3 – $A(abaca)$ est l'automate fini déterministe :



Question 4 – Pour tout $v \in \Sigma^*$, on note suff(v) l'ensemble des suffixes de v.

Dans un premier temps, montrons par récurrence sur $|v|$ que pour tout $v \in \Sigma^*$, le mot $\delta^*(q_0, v)$ est le plus long mot de suff$(v) \cap Q$.

$\star$ Initialisation. Si $|v| = 0$, alors $v = \epsilon$ et le seul élément de suff$(v) \cap Q$ est ϵ. Par définition de δ^*, on a $\delta^*(q_0, \epsilon) = q_0 = \epsilon$ ce qui prouve le résultat.

⋆ Hérédité. Supposons la propriété vraie au rang $n \in \mathbb{N}$. Soit $v \in \Sigma^n$ et $a \in \Sigma$. Par définition de δ^* :

$$\delta^*(q_0, va) = \delta(\delta^*(q_0, v), a).$$

Soit w_0 le plus long mot de $\mathrm{suff}(v) \cap Q$, alors l'hypothèse de récurrence stipule que :

$$\delta^*(q_0, va) = \delta(w_0, a).$$

Par définition de δ, le mot $\delta^*(u, va)$ est donc le plus long mot de $\mathrm{suff}(w_0 a) \cap Q$. Pour obtenir le résultat, il suffit de montrer que :

$$\mathrm{suff}(w_0 a) \cap Q = \mathrm{suff}(va) \cap Q.$$

Comme $w_0 \in \mathrm{suff}(v)$, on a bien $\mathrm{suff}(w_0 a) \subset \mathrm{suff}(va)$. Pour l'autre inclusion, soit $u_0 \in \mathrm{suff}(va) \cap Q$. Si $u_0 = \epsilon$, alors $u_0 \in \mathrm{suff}(w_0 a) \cap Q$. Sinon, la dernière lettre de w_1 est un a et donc $w_1 = w_2 a$ avec $w_2 \in \mathrm{suff}(v)$. Comme $Q = \mathrm{pref}(u)$, on a $w_1 \in \mathrm{pref}(u)$ et donc $w_2 \in \mathrm{pref}(w_1) \subset \mathrm{pref}(u) = Q$.

Ainsi, $w_2 \in \mathrm{suff}(v) \cap Q$. Puisque w_0 est le plus long mot de $\mathrm{suff}(v) \cap Q$, $w_2 \in \mathrm{suff}(w_0)$ et donc $w_1 \in \mathrm{suff}(w_0 a)$.

⋆ Finalement, un mot $v \in \Sigma^*$ est accepté par $A(u)$ si et seulement si $\delta^*(\epsilon, v) = u$. D'après ce qui précède, c'est équivalent à dire que u est le plus long préfixe de v appartenant à Q.

$$\boxed{A(u) \text{ reconnaît le langage } \mathrm{suff}(u).}$$

Question 5 – On remarque que le mot v a pour facteur u si et seulement si il existe un préfixe de v dont u est suffixe. Lorsque l'automate $A(u)$ lit le mot v, il faut l'accepter si et seulement si l'état final est atteint à un moment de l'exécution.

En conclusion, on reprend $A(u)$ en changeant les transitions depuis l'état final u : $\delta(u, a) = u$ pour tout $a \in \Sigma$.