Exercice 1. Expressions régulières

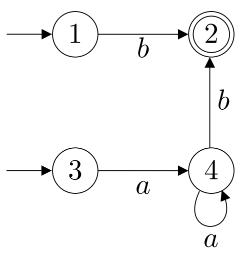
1. Montrer que les expressions régulières $e_1 = (a \mid b)^*$ et $e_2 = (a^*b)^*a^*$ sont sémantiquement équivalentes.
2. Soit $\Sigma = \{a, b\}$. Pour chaque langage L décrit ci-dessous, donner une expression régulière e telle que $L = \mathscr{L}(e)$ ainsi qu'un automate déterministe reconnaissant L :
   (a) L_1 l'ensemble des mots tels que a^2 n'est pas un facteur de u.
   (b) L_2 l'ensemble des mots u tels que $|u|_a \equiv 0 \mod 2$.
   (c) Le langage $L = L_1 \cup L_2$.

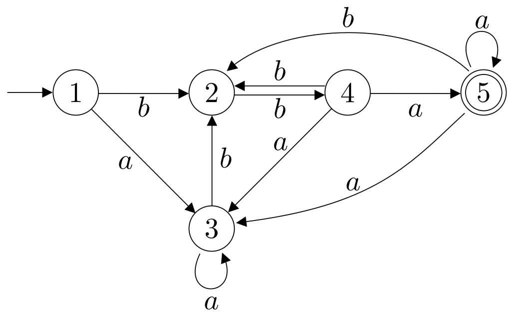
Exercice 2.

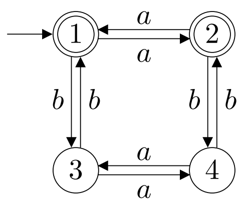
1. Construire les automates de Glushkov associés à e_1, e_2 et e_3 :

$$e_1 = (\varepsilon \mid ab^*)(\varepsilon \mid ba^*) \qquad e_2 = \varepsilon \,\big|\, a\,(\varnothing \mid \varepsilon \mid a \mid b)^*\,a \,\big|\, (a \mid \varepsilon)\,\varnothing\,\varepsilon^* \qquad e_3 = (a^*bba^*)^*$$

2. Construire les expressions régulières associées aux automates :







Exercice 3.

1. Soit $A = (Q, I, F, \delta)$ un automate fini non déterministe et Δ^* la fonction de transition étendue aux mots et aux ensembles d'états. Montrer que pour tout $(e_1, e_2) \in Q^2$, le langage L_{e_1,e_2} est rationnel :

$$L_{e_1,e_2} = \Big\{u \in \Sigma^* : e_2 \in \Delta^*(\{e_1\}, u)\Big\}$$

2. Soit L un langage rationnel. Montrer que le langage $L' = \Big\{uv : vu \in L\Big\}$ est rationnel.

Exercice 4.

Montrer que ces langages ne sont pas rationnels :

$$L_1 = \Big\{u \in \{a,b\}^* : |u|_a = |u|_b\Big\} \qquad L_1' = \Big\{u \in \{a,b\}^* : |u|_a \neq |u|_b\Big\} \qquad L_2 = \Big\{a^{n^2} : n \in \mathbb{N}\Big\}$$

Exercice 5. Racine d'un langage

Soit Σ un alphabet et $L \subset \Sigma^*$ un langage. On définit $\sqrt{L} = \Big\{u \in \Sigma^* : u^2 \in L\Big\}$.

1. Déterminer $\sqrt{ab^*}$, $\sqrt{(ab)^*}$ et $\sqrt{ab^*a}$.
2. Comparer L et $\sqrt{L^2}$.
3. (a) Si L est rationnel, $\sqrt{L}$ est-il nécessairement rationnel ?
   (b) Si $\sqrt{L}$ est rationnel, L est-il nécessairement rationnel ?

Exercice 6.

Pour tout mot $u = u_1 u_2 \dots u_n \in \Sigma^*$, on note $\overline{u} = u_n u_{n-1} \dots u_1$ le mot u écrit à l'envers. Soit L un langage rationnel. Parmi les langages suivants, déterminer lesquels sont nécessairement rationnels :

$$\overline{L} = \left\{ u \in \Sigma^* : \overline{u} \in L \right\} \qquad L_1 = \left\{ u \in \Sigma^* : uu \in L \right\} \qquad L_2 = \left\{ u \in \Sigma^* : u\overline{u} \in L \right\}$$

$$L_3 = \left\{ uu : u \in L \right\} \qquad L_4 = \left\{ u\overline{u} : u \in L \right\}$$

Exercice 7.

Soit Σ un alphabet et $u \in \Sigma^*$ un mot. On dit que u est ***double*** si pour tout $a \in \Sigma$, $|u|_a = 0$ ou $|u|_a \geqslant 2$.

1. Déterminer une quantité $M \in \mathbb{N}^*$ telle que :
   - Pour tout mot u, si $|u| \geqslant M$ alors u admet un facteur double non vide.
   - Il existe un mot u tel que $|u| = M - 1$ et u n'admet pas de facteur double non vide.
2. Soit L l'ensemble des mots doubles. Le langage L est-il rationnel ?

Exercice 8. Réciproque du lemme de l'étoile

Étant donné un langage L, on note $\mathcal{P}(L)$ la propriété :

$\mathcal{P}(L)$: Il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $u \in L$, si $|u| \geqslant n$, alors il existe trois mots x, y, z vérifiant :

$$u = xyz \qquad y \neq \varepsilon \qquad |xy| \leqslant n \qquad \forall k \in \mathbb{N} : xy^k z \in L.$$

Rappelons que le “lemme de l'étoile” stipule que si L est rationnel, alors $\mathcal{P}(L)$ est vraie. Le but de l'exercice est de montrer que la réciproque du lemme de l'étoile est fausse en prenant comme contre-exemple :

$$L_0 = \{a\}^*\{b\}^* \cup \left\{ b^p a^n b^n : p \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N} \right\}$$

1. Montrer $\mathcal{P}(L_0)$.
2. Montrer que L_0 n'est pas rationnel.

Exercice 9.

Soit L un langage rationnel et L' l'ensemble des mots qui diffèrent d'un mot de L d'exactement une lettre. Montrer que L' est rationnel.

Exercice 10.

Soit L un langage rationnel, montrer que le langage suivant est rationnel :

$$\frac{1}{2}L = \left\{ u \in \Sigma^* : \exists v \in \Sigma^*, |u| = |v| \text{ et } uv \in L \right\}$$

Exercice 11.

Soient u et v deux mots. On appelle ***mélange*** de u et v, et on note $u \# v$ le langage défini par :

$$u \# \varepsilon = \{u\} \qquad \varepsilon \# v = \{v\} \qquad \forall (a,b) \in \Sigma^2 : au \# bv = \{a\}(u \# bv) \cup \{b\}(au \# v')$$

1. Déterminer $ab \# abb$

Soient L_1 et L_2 deux langages. On appelle ***mélange*** de L_1 et L_2 le langage :

$$L_1 \# L_2 = \bigcup_{u_1 \in L_1} \bigcup_{u_2 \in L_2} u_1 \# u_2$$

2. Montrer que le mélange de deux langages rationnels est rationnel.