Sauf indication contraire, on se place sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

Exercice 1. Expressions régulières

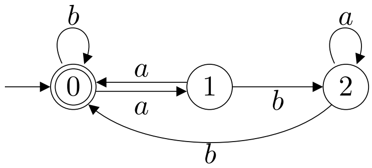
1. Pour chaque langage L décrit ci-dessous, donner une expression régulière e telle que $L = \mathscr{L}(e)$:
   (a) Le langage $L = \{a^{4n+1}, n \in \mathbb{N}\}$.
   (b) L'ensemble des mots ayant pour facteur au moins un élément de $\{aa, aba, abbb\}$.
   (c) Le langage de tous les mots contenant au plus une occurrence de la lettre a.
   (d) L'ensemble des mots $u \in \{a, b, c\}^+$ tels que la dernière lettre de u apparaît exactement une fois dans u.
   (e) L'ensemble des mots u tels que $|u|_a \equiv 0 \mod 2$.
   (f) L'ensemble des mots tels que a^2 n'est pas un facteur de u.
2. Soient e_1 et e_2 deux expressions régulières. Montrer que $(e_1 \cdot e_2)^* \cdot e_1 \equiv e_1 \cdot (e_2 \cdot e_1)^*$
3. Soit e une expression régulière. Montrer que $e^* \cdot e^* \equiv (e^*)^* \equiv e^*$
4. Parmi les expressions régulières suivantes, lesquelles sont sémantiquement équivalentes ? Justifier.

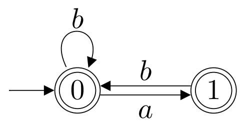
$$e_1 = (a \mid b)^* \qquad e_2 = ab^*a(bab^*a)^* \qquad e_3 = \Big((a \mid \varepsilon)(ab \mid ba)\Big)^* \qquad e_4 = (ab^*ab)^*ab^*a$$

$$e_5 = \varepsilon \mid (b \mid a)^+ \qquad e_6 = a(b \mid aba)^*a \qquad e_7 = (a^*b)^*a^* \qquad e_8 = (ab \mid ba \mid aab \mid aba)^*$$

Exercice 2. Automate produit cartésien

Soient L_1 et L_2 les langages reconnus par les automates :





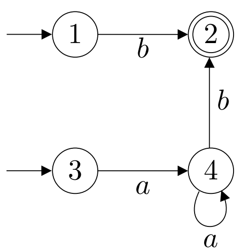
1. Construire un AFD qui reconnaît $L_1 \cap L_2$.
2. Construire un AFD qui reconnaît $L_1 \cup L_2$.

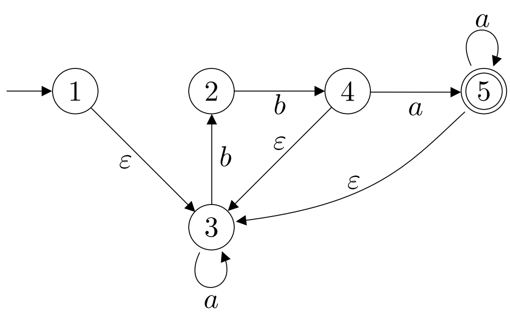
Exercice 3.

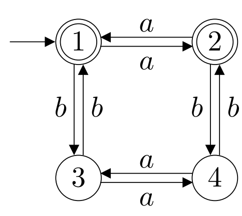
1. Construire les automates de Glushkov associés à :

$$e_1 = (\varepsilon \mid ab^*)(\varepsilon \mid ba^*) \qquad e_2 = \varepsilon \,\big|\, a\,(\varnothing \mid \varepsilon \mid a \mid b)^*\, a \,\big|\, (a \mid \varepsilon)\,\varnothing\,\varepsilon^* \qquad e_3 = (a^*bba^*)^*$$

2. Construire les expressions régulières associées aux automates :







Exercice 4.

1. Soit $A = (Q, I, F, \delta)$ un automate fini non déterministe et Δ^* la fonction de transition étendue aux mots et aux ensembles d'états. Montrer que pour tout $(e_1, e_2) \in Q^2$, le langage L_{e_1,e_2} est rationnel :

$$L_{e_1,e_2} = \left\{u \in \Sigma^* : e_2 \in \Delta^*(\{e_1\}, u)\right\}$$

2. Soit L un langage rationnel. Montrer que le langage $L' = \left\{uv : vu \in L\right\}$ est rationnel.
3. Soit L un langage rationnel. Montrer que les langages suivants sont rationnels :

$$\begin{aligned}
\text{pref}(L) &= \left\{u \in \Sigma^* : \exists w \in L,\ u \text{ est un préfixe de } w\ \right\} \\
\text{suff}(L) &= \left\{u \in \Sigma^* : \exists w \in L,\ u \text{ est un suffixe de } w\ \right\} \\
\text{fact}(L) &= \left\{u \in \Sigma^* : \exists w \in L,\ u \text{ est un facteur de } w\ \right\}
\end{aligned}$$

Exercice 5. Lemme de l'étoile

Montrer que ces langages ne sont pas rationnels :

$$L_1 = \left\{u \in \{a,b\}^* : |u|_a = |u|_b\right\} \qquad L_1' = \left\{u \in \{a,b\}^* : |u|_a \neq |u|_b\right\} \qquad L_2 = \left\{a^{n^2} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

Exercice 6. Racine d'un langage

Soit Σ un alphabet et $L \subset \Sigma^*$ un langage. On définit $\sqrt{L} = \left\{u \in \Sigma^* : u^2 \in L\right\}$.

1. Déterminer $\sqrt{ab^*}$, $\sqrt{(ab)^*}$ et $\sqrt{ab^*a}$.
2. Comparer L et $\sqrt{L^2}$.
3. (a) Si L est rationnel, $\sqrt{L}$ est-il nécessairement rationnel ?
   (b) Si $\sqrt{L}$ est rationnel, L est-il nécessairement rationnel ?

Exercice 7.

Pour tout mot $u = u_1 u_2 \dots u_n \in \Sigma^*$, on note $\overline{u} = u_n u_{n-1} \dots u_1$ le mot u écrit à l'envers. Soit L un langage rationnel. Parmi les langages suivants, déterminer lesquels sont nécessairement rationnels :

$$\overline{L} = \left\{u \in \Sigma^* : \overline{u} \in L\right\} \qquad L_1 = \left\{u \in \Sigma^* : uu \in L\right\} \qquad L_2 = \left\{u \in \Sigma^* : u\overline{u} \in L\right\}$$

$$L_3 = \left\{uu : u \in L\right\} \qquad L_4 = \left\{u\overline{u} : u \in L\right\}$$

Exercice 8.

Soit Σ un alphabet et $u \in \Sigma^*$ un mot. On dit que u est ***double*** si pour tout $a \in \Sigma$, $|u|_a = 0$ ou $|u|_a \geqslant 2$.

1. Déterminer une quantité $M \in \mathbb{N}^*$ telle que :
   - Pour tout mot u, si $|u| \geqslant M$ alors u admet un facteur double non vide.
   - Il existe un mot u tel que $|u| = M - 1$ et u n'admet pas de facteur double non vide.
2. Soit L l'ensemble des mots doubles. Le langage L est-il rationnel ?

Exercice 9. Réciproque du lemme de l'étoile

Étant donné un langage L, on note $\mathcal{P}(L)$ la propriété :

$\mathcal{P}(L)$: Il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $u \in L$, si $|u| \geqslant n$, alors il existe trois mots x, y, z vérifiant :

$$u = xyz \qquad y \neq \varepsilon \qquad |xy| \leqslant n \qquad \forall k \in \mathbb{N} : xy^k z \in L.$$

Rappelons que le "lemme de l'étoile" stipule que si L est rationnel, alors $\mathcal{P}(L)$ est vraie. Le but de l'exercice est de montrer que la réciproque du lemme de l'étoile est fausse en prenant comme contre-exemple :

$$L_0 = \{a\}^*\{b\}^* \cup \left\{b^p a^n b^n : p \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}\right\}$$

1. Montrer $\mathcal{P}(L_0)$.
2. Montrer que L_0 n'est pas rationnel.

Exercice 10.

Soit L un langage rationnel et L' l'ensemble des mots qui diffèrent d'un mot de L d'exactement une lettre. Montrer que L' est rationnel.

Exercice 11.

Soit L un langage rationnel, montrer que le langage suivant est rationnel :

$$\frac{1}{2}L = \left\{u \in \Sigma^* : \exists v \in \Sigma^*, |u| = |v| \text{ et } uv \in L\right\}$$

Exercice 12.

Soient u et v deux mots. On appelle ***mélange*** de u et v, et on note $u \mathbin{\#} v$ le langage défini par :

$$u \mathbin{\#} \varepsilon = \{u\} \qquad \varepsilon \mathbin{\#} v = \{v\} \qquad \forall (a,b) \in \Sigma^2 : au \mathbin{\#} bv = \{a\}(u \mathbin{\#} bv) \ \cup \ \{b\}(au \mathbin{\#} v')$$

1. Déterminer $ab \mathbin{\#} abb$

Soient L_1 et L_2 deux langages. On appelle ***mélange*** de L_1 et L_2 le langage :

$$L_1 \mathbin{\#} L_2 = \bigcup_{u_1 \in L_1} \bigcup_{u_2 \in L_2} u_1 \mathbin{\#} u_2$$

2. Montrer que le mélange de deux langages rationnels est rationnel.