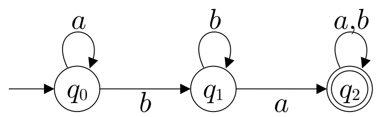
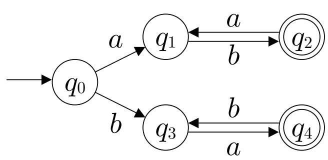
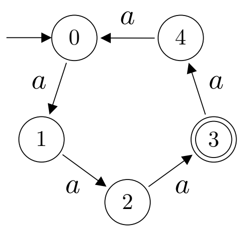
Sauf indication contraire, on se place sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

Exercice 1. Exemples d'AFD

1. Quels sont les langages reconnus par les AFD suivants ?





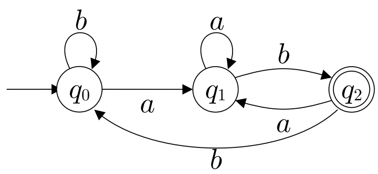


2. Donner un AFD reconnaissant :
   (a) Le langage de tous les mots de longueur impaire.
   (b) Le langage de tous les mots contenant au plus une occurrence de la lettre a.
   (c) Le langage de tous les mots avec un nombre pair de a.
   (d) Le langage de tous les mots u tels que $|u|_a$ est pair et $|u|_b$ est un multiple de 3.
   (e) Le langage $L = \{ab\}^* \cup \{aa\}^*$.
   (f) Le langage $L = \{ab\}\Sigma^* \cup \{ba\}\Sigma^*$.
   (g) Le langage de tous les mots comptant au moins deux occurrences de leur dernière lettre.
   (h) Le langage de tous les mots $u \in \{a, b\}^*$ tels que tout facteur de longueur 4 de u a pour facteur abb.

Exercice 2. Standardisation d'AFD

Un AFD est dit ***standard*** s'il ne contient pas de transition vers l'état initial.

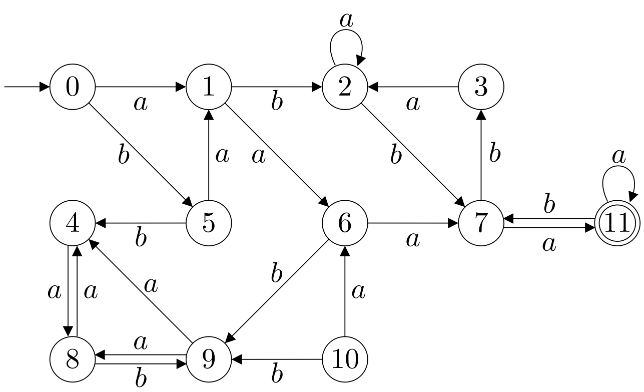
1. Construire un automate standard reconnaissant le même langage que :

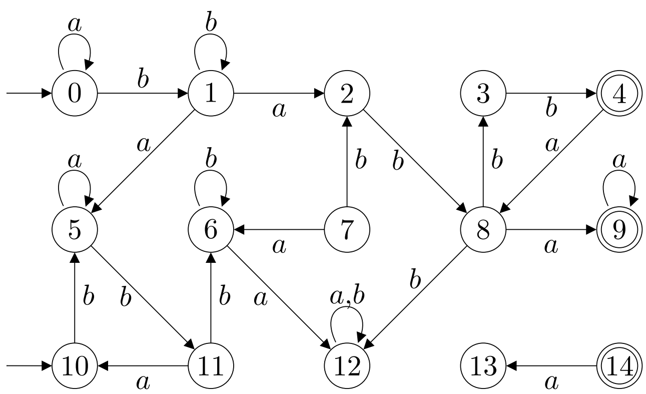


2. Soit L un langage reconnaissable. Construire un automate standard reconnaissant L.

Exercice 3. Émondage

Émonder les deux AFD :



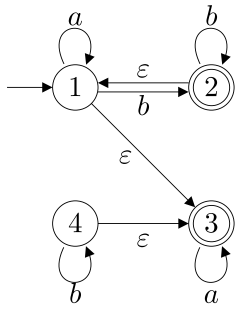


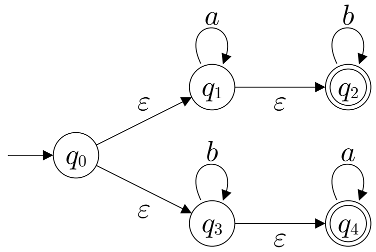
Exercice 4. AFD avec un seul état final

Trouver un langage reconnaissable ne pouvant pas être reconnu par un AFD avec un seul état acceptant. Justifier

Exercice 5. Élimination des ε-transitions

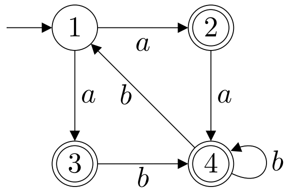
Pour chaque automate, construire un AFND sans ε-transition qui reconnaît le même langage :

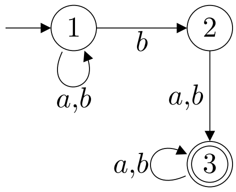


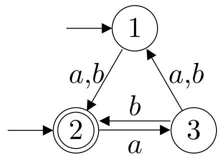


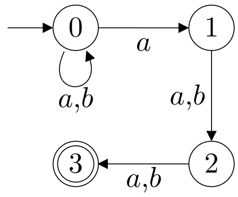
Exercice 6. Déterminisation d'AFND

Déterminiser les automates :



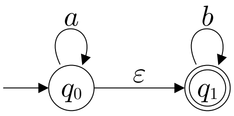


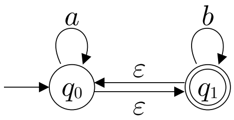


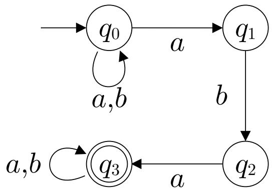


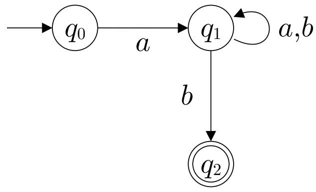
Exercice 7. Exemples d'AFND

1. Quels sont les langages reconnus par les AFND suivants ?

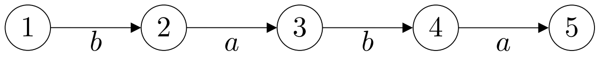








2. Pour chaque langage, donner un AFND puis un AFD qui le reconnaît :
   (a) Le langage $\{a\}\{a,b\}^*\{a\}$.
   (b) Le langage de tous les mots comptant au moins deux occurrences de leur dernière lettre (il s'agit du même langage que dans la question 2g de l'exercice 1).
3. Soit $u = baba$ et A l'automate :



   Pour chaque langage ci-dessous, donner un AFND qui le reconnaît. Les AFND doivent être obtenus à partir de A en choisissant un ou plusieurs états initiaux, un ou plusieurs états finaux et en ajoutant éventuellement des transitions.
   (a) L'ensemble des préfixes de u.
   (b) L'ensemble des suffixes de u.
   (c) L'ensemble des facteurs de u.
   (d) L'ensemble des sous-mots de u.
4. Déterminiser les AFND de la question précédente.

5. Pour chaque langage, donner un AFND qui le reconnaît :
   (a) L'ensemble des mots ayant pour facteur au moins un élément de $\{ab, aaba, baa\}$.
   (b) L'ensemble des mots $u \in \{a, b, c, d\}^+$ tels que la dernière lettre de u apparaît exactement une fois dans u.
   (c) L'ensemble des mots de la forme uv où u contient un nombre pair de a et $v \in \{aba\}\{a, b\}^* \cup \{a, b\}^*\{bba\}$.

Exercice 8. Langage singleton

1. Soit $A = (Q, I, F, \delta)$ un AFND tel que $\mathscr{L}(A) \neq \varnothing$. Montrer qu'il existe $u \in \mathscr{L}(A)$ tel que $|u| \leqslant \mathrm{card}(Q) - 1$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in \Sigma^n$ et $L = \{u\}$.
   (a) Montrer que L est reconnu par un AFD ayant $n + 1$ état.
   (b) Montrer qu'aucun AFND avec moins de n états ne peut reconnaître L.

Exercice 9. Écriture binaire

Soit $\Sigma = \{0, 1\}$. Pour tout mot $u = u_1 \dots u_n$, on note $b_1(u)$ et $b_2(u)$ les entiers :

$$b_1(u) = \sum_{i=1}^{n} u_i 2^{n-i} \qquad\qquad b_2(u) = \sum_{i=1}^{n} u_i 2^{i-1}$$

En d'autres termes, u est l'écriture en base 2 de $b_1(u)$ (resp. $b_2(u)$) en commençant par le bit de poids fort (resp. de poids faible). Par exemple :

u	ε	0	10	01001	011001010
$b_1(u)$	0	0	2	9	202
$b_2(u)$	0	0	1	18	166

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit :

$$A_k = \Big\{u \in \Sigma^* : b_1(u) \text{ est divisible par } k\Big\} \qquad\qquad B_k = \Big\{u \in \Sigma^* : b_2(u) \text{ est divisible par } k\Big\}$$

1. Construire des AFD pour reconnaître A_2, A_3, A_4, B_2, B_3, B_4.
2. Montrer que le langage A_k est reconnaissable pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Justifier.
3. Montrer que le langage B_k est reconnaissable pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Justifier.

Exercice 10. Facteurs, sous-mots et préfixes

1. Pour chaque langage, donner un AFD qui le reconnaît :
   (a) Le langage de tous les mots ayant aab pour sous-mot.
   (b) Le langage de tous les mots ayant aab pour facteur.

Pour tout $u \in \Sigma^*$, on note $\mathrm{pref}(u)$ l'ensemble des préfixes de u et $A(u)$ l'AFD (Q, q_0, F, δ) où :

$$Q = \mathrm{pref}(u) \qquad\qquad q_0 = \varepsilon \qquad\qquad F = \{u\}$$

et pour tout $v \in Q$ et $a \in \Sigma$, $\delta(v, a)$ est le plus long suffixe de va appartenant à Q.

2. Construire $A(abaca)$ dans le cas où $\Sigma = \{a, b, c\}$.
3. Soit $u \in \Sigma^*$. Déterminer $\mathscr{L}(A(u))$. Justifier.
4. Soit $u \in \Sigma^*$. Définir un AFD qui reconnaît les mots dont u est un facteur.