Exercice 2. Étude de l'algorithme de Berge

Question 1.a – Comme γ est M-augmentante, on a :

$$\begin{cases} a_i \notin M & \text{si } i \text{ est impair} \\ a_i \in M & \text{si } i \text{ est pair} \end{cases}$$

De plus, cette chaîne relie deux sommets M-exposés, en particulier $a_\ell \notin M$. La longueur ℓ est donc impaire et peut s'écrire $\ell = 2r+1$. D'où :

$$M' = \Big(M \setminus \{a_{2j} : j \in [\![1;r]\!]\}\Big) \cup \{a_{2j+1} : j \in [\![0;r]\!]\}.$$

et :

$$|M'| = |M| - r + (r+1) = |M| + 1.$$

Question 1.b – Il faut montrer que chaque sommet $u \in S$ apparaît au plus une fois dans les arêtes de M'. On traite plusieurs cas :

- → Si u n'appartient pas à la chaîne γ, alors u n'apparaît dans aucun des a_i. Il apparaît autant de fois dans M' que dans M, c'est à dire au plus une fois.
- → Si u est le premier sommet de γ. Alors par définition d'une chaîne M-augmentante, u est M-exposé, c'est à dire qu'il n'apparaît pas dans M. De plus, u apparaît dans a_1 et comme γ est une chaîne élémentaire il n'apparaît dans aucun autre des a_j. Finalement, u apparaît exactement une fois dans M'.
- → Si u est le dernier sommet de γ, on procède de manière similaire au cas précédent.
- → Sinon, u est un sommet de γ mais n'est ni le premier, ni le dernier sommet. Alors la chaîne γ rejoint u par l'une des arêtes a_j et en repart par l'arête a_{j+1}. On a donc $u \in a_j$, $u \in a_{j+1}$ et $u \notin a_{j'}$ pour $j' \notin \{j, j+1\}$. Comme γ est une chaîne M-augmentante, on a $a_j \in M$ et $a_{j+1} \notin M$ ou inversement. Supposons $a_j \in M$ et $a_{j+1} \notin M$ (l'autre cas est symétrique). Le sommet u apparaît dans l'arête $a_j \in M$ mais dans aucune autre arête de M. Ainsi :

  $$M' = ((M \setminus \{a_j\}) \cup \{a_{j+1}\}) \Delta \{a_1, \ldots, a_{j-1}\} \Delta \{a_{j+2}, \ldots, a_\ell\}$$

  et u apparaît exactement une fois dans M'.

Question 1.c – Soient n et m le nombre de sommets et d'arêtes dans G. Un couplage M vérifie $|M| \leqslant m$ et $|M| \leqslant n/2$. On en déduit que le nombre de tours de boucle est inférieur à $\min(m, n/2)$ donc l'algorithme termine.

Question 2 – Pour chercher une chaîne augmentante, on effectue un parcours, soit un temps d'exécution en $\mathcal{O}(\max(n,m))$. De plus, le nombre de tours de boucle est en $\mathcal{O}(\min(n,m))$.
Finalement le temps d'exécution est en $\mathcal{O}(\min(n,m).\max(n,m))$, c'est à dire :

$$\boxed{\mathcal{O}(nm)}$$

Question 3.a – Supposons $a_1 \in M_1$. Puisque les arêtes a_1 et a_2 se suivent dans la chaîne γ, elles ont un sommet en commun noté u. Comme u apparaît au plus une fois dans M_1 et que $u \in a_1$, on en déduit que $a_2 \notin M_1$ et donc $a_2 \in M_2$.

L'autre implication se traite de manière similaire.

Question 3.b – Soit γ la plus grande chaîne élémentaire de $I(G', R)$ et ℓ sa longueur. Alors γ est de la forme $\gamma = (u_0, u_1, \ldots, u_\ell)$.

⋆ Si $\ell = 0$ alors $\deg(u_0) = 0$ (sinon γ ne serait pas de longueur maximale). Comme $I(G', R)$ est connexe, on en déduit que $I(G', R)$ est de type 1.

$\star$ Sinon, on a $\ell > 0$. Puisque M_1 et M_2 sont des couplages, chaque sommet $u \in R$ apparaît au plus une fois dans M_1 et au plus une fois dans M_2, c'est à dire que $\deg(u) \leqslant 2$. Grâce aux arêtes présentes dans γ :

$$1 \leqslant \deg(u_0) \leqslant 2, \qquad 1 \leqslant \deg(u_\ell) \leqslant 2, \qquad \deg(u_i) = 2 \text{ pour tout } i \in [\![1, \ell-1]\!].$$

$\star\star$ Si $\deg(u_0) = \deg(u_\ell) = 1$ alors toutes les arêtes contenant l'un des u_i sont présentes dans γ. Comme $I(G', R)$ est connexe : $R = \{u_0, \dots, u_\ell\}$ et donc $I(G', R)$ est de type 2.

$\star\star$ Sinon, supposons $\deg(u_0) = 2$ (le cas $\deg(u_\ell) = 2$ se traite de la même façon). Les voisins de u_0 dans $I(G', R)$ sont u_1 et un autre sommet noté $v \neq u_1$. Puisque γ est une chaîne élémentaire de longueur maximum, le sommet v appartient déjà à γ. On a :

- $\rightarrow$ $v \neq u_0$ (car le graphe est biparti, donc ne contient pas de boucle).
- $\rightarrow$ $v \neq u_1$ (voir l'hypothèse ci-dessus).
- $\rightarrow$ $v \notin \{u_2, \dots, u_{\ell-1}\}$ (sinon on aurait $\deg(v) \geqslant 3$).

En conclusion, $v = u_\ell$ et donc $\deg(u_\ell) = 2$. Puisque $I(G', R)$ est connexe, on a $R = \{u_0, \dots, u_\ell\}$ et son ensemble d'arêtes est composé de l'arête $\{u_0, u_\ell\}$ et des arêtes de γ. Finalement $I(G', R)$ est de type 3.

Question 4.a – On vérifie facilement que :

$$(M_1 \Delta M_2) \cap M_1 = M_1 \setminus (M_1 \cap M_2) \qquad (M_1 \Delta M_2) \cap M_2 = M_2 \setminus (M_1 \cap M_2)$$

Ainsi :

$$|(M_1 \Delta M_2) \cap M_1| = |M_1| - |M_1 \cap M_2| < |M_2| - |M_1 \cap M_2| = |(M_1 \Delta M_2) \cap M_2|$$

Question 4.b – Soient $R_1, R_2, \dots$ les composantes connexes de G'. Dans la suite, on note $G_j = I(G', R_j)$ et A_j l'ensemble des arêtes de G_j. D'après la question 3.b, chaque G_j est de type 1, 2 ou 3 :

- $\rightarrow$ Si G_j est de type 1, alors $A_j = \varnothing$ donc $A_j \cap M_1 = A_j \cap M_2 = \varnothing$.
- $\rightarrow$ Si G_j est de type 3, notons γ le cycle formé par les sommets et les arêtes de G_j. Alors γ est de longueur paire car G_j est biparti. Grâce à la question 3.a, on sait qu'il contient autant d'arêtes de M_1 que d'arêtes de M_2.

Lorsqu'on ne considère que les sous-graphes G_j de type 1 ou 3, le nombre d'arêtes issues de M_1 est égal au nombre d'arêtes issues de M_2. Grâce à la question 4.a, on sait donc qu'il existe au moins un G_j de type 2 contenant plus d'arêtes issues de M_2 que d'arêtes issues de M_1.

Question 4.c – Soit R la composante connexe définie dans la question 4.b et $\gamma = (u_0, u_1, \dots, u_\ell)$ la chaîne de G' composée des sommets et arêtes de $I(G', R)$. Vérifions que γ ou $\overline{\gamma}$ est bien M_1-augmentante ($\overline{\gamma}$ est la chaîne γ parcourue à l'envers).

Par la question 3.a, γ alterne entre des arêtes de M_1 et de M_2. Comme γ contient plus d'arêtes de M_2, sa longueur ℓ est impaire, elle commence par une arête de M_2 et termine par une arête de M_2. On a alors :

- $\rightarrow$ $\ell > 0$ par hypothèse.
- $\rightarrow$ u_0 et u_ℓ sont M_1-exposés. En effet, toutes les arêtes incidentes à u_0 et u_ℓ sont dans $I(G', R)$. La seule arête incidente à u_0 (resp. u_ℓ) est donc la première (resp. dernière) arête de γ. Cette arête n'appartient pas à M_1.
- $\rightarrow$ Si i est pair alors l'arête $\{u_i, u_{i+1}\} \notin M_1$.
- $\rightarrow$ Si i est impair alors l'arête $\{u_i, u_{i+1}\} \in M_1$.
- $\rightarrow$ γ est bien une chaîne élémentaire.
- $\rightarrow$ ℓ est impair donc $u_0 \in S_1$ et $u_\ell \in S_2$ ou inversement.

En conclusion, γ ou $\overline{\gamma}$ est une chaîne M_1-augmentante.

Question 5 – Montrons les deux sens de l'équivalence.

$(\Rightarrow)$ Par contraposée, supposons que G admet une chaîne M-augmentante notée γ et montrons que M n'est pas un couplage maximal de G. D'après les questions 1.a et 1.b, si on note A l'ensemble des arêtes de γ alors l'ensemble $M' = M \Delta A$ est un couplage de G et $|M'| = |M| + 1$. Donc M n'est pas un couplage maximal de G.

$(\Leftarrow)$ Par contraposée, on suppose que M n'est pas un couplage maximal et on montre que G contient une chaîne M-augmentante. Si M n'est pas maximale, c'est qu'il existe un couplage M' vérifiant $|M| < |M'|$. Par la question 4.c, il existe une chaîne M-augmentante dans G.

Question 6 – On utilise l'invariant de boucle :

$$(\mathcal{P}_i) : \text{L'ensemble } M_i \text{ est un couplage de } G.$$

On a $(\mathcal{P}_0)$ car $M_0 = \varnothing$ et $(\mathcal{P}_i) \Rightarrow (\mathcal{P}_{i+1})$ par la question 1.b. Par itération finie, l'ensemble M_k est bien un couplage de G. De plus, comme l'algorithme renvoie M_k, on sait qu'il n'existe pas de chaîne M_k-augmentante dans G. Par la question 5, M_k est bien un couplage maximal dans G.