

## Exercice 1. Implémentation de l'algorithme de Berge

Question 1 – Voir les question intermédiaire ci-dessous.

Question 2 –

```
let make_graphe (g_bip: graphe_bip): graphe =
  let g = {
    mat_adj = Array.make_matrix g_bip.n0 g_bip.n1 0;
    s_adj = Array.make g_bip.n0 true;
    t_adj = Array.make g_bip.n1 true;
  } in
  List.iter (fun (s1,s2) -> g.mat_adj.(s1).(s2) <- 1) g_bip.arettes;
  g;;
```

Question 3 –

```
let get_couplage (g: graphe): (int*int) list =
  let n0 = Array.length g.s_adj in
  let n1 = Array.length g.t_adj in
  let coupl = ref [] in
  for u0 = 0 to n0 - 1 do
    for u1 = 0 to n1 - 1 do
      if g.mat_adj.(u0).(u1) = -1 then
        coupl := (u0,u1) :: !coupl
    done;
  done;
  !coupl;;
```

Question 4 –

```
(* c = chaine M-augmentante dont le premier sommet appartient à S0 *)
(* On remarque que les nouveaux sommets saturés sont les extrémités de
la chaine *)
let maj_graphe (g: graphe) (c: int list): unit =
  let rec aux = function
    | u0 :: u1 :: [] ->
      g.mat_adj.(u0).(u1) <- -1;
      g.t_adj.(u1) <- false
    | u0 :: u1 :: v0 :: q ->
      g.mat_adj.(u0).(u1) <- -1;
      g.mat_adj.(v0).(u1) <- 1;
      aux (v0 :: q)
    | _ -> failwith "maj_graphe: liste vide ou de taille impaire en entrée"
  in
  aux c;
  g.s_adj.(List.hd c) <- false;;
```

Question 5.a –

```
let rec list_init (n: int) (pred: int -> bool): int list = match n with
| -1 -> []
| n when pred n -> n :: list_init (n-1) pred
| n -> list_init (n-1) pred;;
```

Question 5.b – On effectue un parcours en profondeur du graphe. Pour cela, on utilise une variable « vis: bool array array » telle que :

- vis.(0).(i) indique si le sommet numéro i de  $S_0$  a déjà été visité.
- vis.(1).(j) indique si le sommet numéro j de  $S_1$  a déjà été visité.

La fonction voisins renvoie la liste des sommets non visités voisins de u.

Le paramètre  $k \in \{0, 1\}$  en entrée indique si u appartient à  $S_0$  ou  $S_1$ .

La fonction parc\_prof renvoie un chemin de s vers t dans g sous la forme d'une liste chaînée de sommets (ou la liste vide si un tel chemin n'a pas été trouvé).

```
let voisins (g: graphe) (u: int) (vis: bool array array) (k: int) =
  if k = 0 then begin
    let n1 = Array.length vis.(1) in
    let pred v = g.mat_adj.(u).(v) = 1 in
    list_init (n1-1) pred
  end
  else begin
    let n0 = Array.length vis.(0) in
    let pred v = g.mat_adj.(v).(u) = -1 in
    list_init (n0-1) pred
  end;;
```

```
let get_CMA (g: graphe) =
  let n0 = Array.length g.s_adj in
  let n1 = Array.length g.t_adj in
  let vis = [|Array.make n0 false; Array.make n1 false|] in

  let rec parc_prof (li: int list) (k: int): int list = match li with
  | [] -> []
  | u :: q when k = 1 && g.t_adj.(u) -> [u]
  | u :: q when vis.(k).(u) -> parc_prof q k
  | u :: q ->
    vis.(k).(u) <- true;
    let c = parc_prof (voisins g u vis k) (1-k) in
    if c = [] then parc_prof q k else u :: c
  in

  let pred u0 = g.s_adj.(u0) in
  parc_prof (list_init (n0-1) pred) 0;;
```

## Question 6 –

```
let berge (g_bip: graphe_bip) =
  let g = make_graphe g_bip in
  let c = ref (get_CMA g) in
  while !c <> [] do
    maj_graphe g !c;
    c := get_CMA g;
  done;
  get_couplage g;;
```

## Exercice 2. Étude de l’algorithme de Berge

**Question 1.a** – Comme  $\gamma$  est  $M$ -augmentante, on a :

$$\begin{cases} a_i \notin M & \text{si } i \text{ est impair} \\ a_i \in M & \text{si } i \text{ est pair} \end{cases}$$

De plus, cette chaîne relie deux sommets  $M$ -exposés, en particulier  $a_\ell \notin M$ . La longueur  $\ell$  est donc impaire et peut s’écrire  $\ell = 2r + 1$ . D’où :

$$M' = (M \setminus \{a_{2j} : j \in \llbracket 1; r \rrbracket\}) \cup \{a_{2j+1} : j \in \llbracket 0; r \rrbracket\}.$$

et :

$$|M'| = |M| - r + (r + 1) = |M| + 1.$$

**Question 1.b** – Il faut montrer que chaque sommet  $u \in S$  apparaît au plus une fois dans les arêtes de  $M'$ . On traite plusieurs cas :

- Si  $u$  n’appartient pas à la chaîne  $\gamma$ , alors  $u$  n’apparaît dans aucun des  $a_i$ . Il apparaît autant de fois dans  $M'$  que dans  $M$ , c’est à dire au plus une fois.
- Si  $u$  est le premier sommet de  $\gamma$ . Alors par définition d’une chaîne  $M$ -augmentante,  $u$  est  $M$ -exposé, c’est à dire qu’il n’apparaît pas dans  $M$ . De plus,  $u$  apparaît dans  $a_1$  et comme  $\gamma$  est une chaîne élémentaire il n’apparaît dans aucun autre des  $a_j$ . Finalement,  $u$  apparaît exactement une fois dans  $M'$ .
- Si  $u$  est le dernier sommet de  $\gamma$ , on procède de manière similaire au cas précédent.
- Sinon,  $u$  est un sommet de  $\gamma$  mais n’est ni le premier, ni le dernier sommet. Alors la chaîne  $\gamma$  rejoint  $u$  par l’une des arêtes  $a_j$  et en repart par l’arête  $a_{j+1}$ . On a donc  $u \in a_j$ ,  $u \in a_{j+1}$  et  $u \notin a_{j'}$  pour  $j' \notin \{j, j+1\}$ . Comme  $\gamma$  est une chaîne  $M$ -augmentante, on a  $a_j \in M$  et  $a_{j+1} \notin M$  ou inversement. Supposons  $a_j \in M$  et  $a_{j+1} \notin M$  (l’autre cas est symétrique). Le sommet  $u$  apparaît dans l’arête  $a_j \in M$  mais dans aucune autre arête de  $M$ . Ainsi :

$$M' = ((M \setminus \{a_j\}) \cup \{a_{j+1}\}) \Delta \{a_1, \dots, a_{j-1}\} \Delta \{a_{j+2}, \dots, a_\ell\}$$

et  $u$  apparaît exactement une fois dans  $M'$ .

**Question 1.c** – Soient  $n$  et  $m$  le nombre de sommets et d’arêtes dans  $G$ . Un couplage  $M$  vérifie  $|M| \leq m$  et  $|M| \leq n/2$ . On en déduit que le nombre de tours de boucle est inférieur à  $\min(m, n/2)$  donc l’algorithme termine.

**Question 2** – Pour chercher une chaîne augmentante, on effectue un parcours, soit un temps d’exécution en  $\mathcal{O}(\max(n, m))$ . De plus, le nombre de tours de boucle est en  $\mathcal{O}(\min(n, m))$ . Finalement le temps d’exécution est en  $\mathcal{O}(\min(n, m) \cdot \max(n, m)) = \mathcal{O}(nm)$ .

**Question 3.a** – Supposons  $a_1 \in M_1$ . Puisque les arêtes  $a_1$  et  $a_2$  se suivent dans la chaîne  $\gamma$ , elles ont un sommet en commun noté  $u$ . Comme  $u$  apparaît au plus une fois dans  $M_1$  et que  $u \in a_1$ , on en déduit que  $a_2 \notin M_1$  et donc  $a_2 \in M_2$ .

L'autre implication se traite de manière similaire.

**Question 3.b** – Soit  $\gamma$  la plus grande chaîne élémentaire de  $I(G', R)$  et  $\ell$  sa longueur. Alors  $\gamma$  est de la forme  $\gamma = (u_0, u_1, \dots, u_\ell)$ .

★ Si  $\ell = 0$  alors  $\deg(u_0) = 0$  (sinon  $\gamma$  ne serait pas de longueur maximale). Comme  $I(G', R)$  est connexe, on en déduit que  $I(G', R)$  est de type 1.

★ Sinon, on a  $\ell > 0$ . Puisque  $M_1$  et  $M_2$  sont des couplages, chaque sommet  $u \in R$  apparaît au plus une fois dans  $M_1$  et au plus une fois dans  $M_2$ , c'est à dire que  $\deg(u) \leq 2$ . Grâce aux arêtes présentes dans  $\gamma$ , on a :

$$1 \leq \deg(u_0) \leq 2, \quad 1 \leq \deg(u_\ell) \leq 2, \quad \deg(u_i) = 2 \text{ pour tout } i \in \llbracket 1, \ell - 1 \rrbracket.$$

★★ Si  $\deg(u_0) = \deg(u_\ell) = 1$  alors toutes les arêtes contenant l'un des  $u_i$  sont présentes dans  $\gamma$ . Comme  $I(G', R)$  est connexe, on a  $R = \{u_0, \dots, u_\ell\}$  et donc  $I(G', R)$  est de type 2.

★★ Sinon, supposons  $\deg(u_0) = 2$  (le cas  $\deg(u_\ell) = 2$  se traite de la même façon). Les voisins de  $u_0$  dans  $I(G', R)$  sont  $u_1$  et un autre sommet noté  $v \neq u_1$ . Puisque  $\gamma$  est une chaîne élémentaire de longueur maximum, le sommet  $v$  appartient déjà à  $\gamma$ . On a :

- $v \neq u_0$  (car le graphe est biparti, donc ne contient pas de boucle).
- $v \neq u_1$  (voir l'hypothèse ci-dessus).
- $v \notin \{u_2, \dots, u_{\ell-1}\}$  (sinon on aurait  $\deg(v) \geq 3$ ).

En conclusion,  $v = u_\ell$  et donc  $\deg(u_\ell) = 2$ . Puisque  $I(G', R)$  est connexe, on a  $R = \{u_0, \dots, u_\ell\}$  et son ensemble d'arêtes est composé de l'arête  $\{u_0, u_\ell\}$  et des arêtes de  $\gamma$ . Finalement  $I(G', R)$  est de type 3.

**Question 4.a** – Pour commencer, remarquons qu'une arête de  $M_1 \Delta M_2$  ne peut pas appartenir à la fois à  $M_1$  et à  $M_2$ . On a :

$$(M_1 \Delta M_2) \cap M_1 = M_1 \setminus (M_1 \cap M_2) \quad (M_1 \Delta M_2) \cap M_2 = M_2 \setminus (M_1 \cap M_2)$$

Donc :

$$|(M_1 \Delta M_2) \cap M_1| = |M_1| - |M_1 \cap M_2| < |M_2| - |M_1 \cap M_2| = |(M_1 \Delta M_2) \cap M_2|$$

**Question 4.b** – Soient  $R_1, R_2, \dots$  les composantes connexes de  $G'$ . Dans la suite, on note  $G_j = I(G', R_j)$  et  $A_j$  l'ensemble des arêtes de  $G_j$ . D'après la question 3.b, chaque  $G_j$  est de type 1, 2 ou 3 :

- Si  $G_j$  est de type 1, alors  $A_j = \emptyset$  donc  $A_j \cap M_1 = A_j \cap M_2 = \emptyset$ .
- Si  $G_j$  est de type 3, on note  $\gamma$  le cycle formé par les sommets et les arêtes de  $G_j$ . Alors  $\gamma$  est de longueur paire car  $G_j$  est biparti. Grâce à la question 3.a, on sait qu'il contient autant d'arêtes de  $M_1$  que d'arêtes de  $M_2$ .

Lorsqu'on ne considère que les sous-graphes  $G_j$  de type 1 ou 3, le nombre d'arêtes issues de  $M_1$  est égal au nombre d'arêtes issues de  $M_2$ . Grâce à la question 4.a, on sait donc qu'il existe au moins un  $G_j$  de type 2 contenant plus d'arêtes issues de  $M_2$  que d'arêtes issues de  $M_1$ .

**Question 4.c** – Soit  $R$  la composante connexe définie dans la question 4.b et  $\gamma = (u_0, u_1, \dots, u_\ell)$  la chaîne de  $G'$  composée des sommets et arêtes de  $I(G', R)$ . Vérifions que  $\gamma$  est bien  $M_1$ -augmentante.

Par la question 3.a,  $\gamma$  alterne entre des arêtes de  $M_1$  et de  $M_2$ . Comme  $\gamma$  contient plus d'arêtes de  $M_2$ , sa longueur  $\ell$  est impaire, elle commence par une arête de  $M_2$  et termine par une arête de  $M_2$ . On a alors :

- $\ell > 0$  par hypothèse.
- $u_0$  et  $u_\ell$  sont  $M_1$ -exposés. En effet, toutes les arêtes incidentes à  $u_0$  et  $u_\ell$  sont dans  $I(G', R)$ . La seule arête incidente à  $u_0$  (resp.  $u_\ell$ ) est donc la première (resp. dernière) arête de  $\gamma$ . Cette arête n'appartient pas à  $M_1$ .
- Si  $i$  est pair alors l'arête  $\{u_i, u_{i+1}\} \notin M_1$ .
- Si  $i$  est impair alors l'arête  $\{u_i, u_{i+1}\} \in M_1$ .
- $\gamma$  est bien une chaîne élémentaire.

En conclusion,  $\gamma$  est bien une chaîne  $M_1$ -augmentante.

**Question 5** – On montre les deux sens de l'équivalence.

( $\Rightarrow$ ) Par contraposée, supposons que  $G$  admet une chaîne  $M$ -augmentante notée  $\gamma$  et montrons que  $M$  n'est pas un couplage maximal de  $G$ . D'après les questions 1.a et 1.b, si on note  $A$  l'ensemble des arêtes de  $\gamma$  alors l'ensemble  $M' = M \Delta A$  est un couplage de  $G$  et  $|M'| = |M| + 1$ . Donc  $M$  n'est pas un couplage maximal de  $G$ .

( $\Leftarrow$ ) Par contraposée, on suppose que  $M$  n'est pas un couplage maximal et on montre que  $G$  contient une chaîne  $M$ -augmentante. Si  $M$  n'est pas maximale, c'est qu'il existe un couplage  $M'$  vérifiant  $|M| < |M'|$ . Par la question 4.c, il existe une chaîne  $M$ -augmentante dans  $G$ .

**Question 6** – On utilise l'invariant de boucle :

( $\mathcal{P}_i$ ) : L'ensemble  $M_i$  est un couplage de  $G$ .

On a ( $\mathcal{P}_0$ ) car  $M_0 = \emptyset$  et ( $\mathcal{P}_i$ )  $\Rightarrow$  ( $\mathcal{P}_{i+1}$ ) par la question 1.b. Par itération finie, l'ensemble  $M_k$  est bien un couplage de  $G$ . De plus, comme l'algorithme renvoie  $M_k$ , on sait qu'il n'existe pas de chaîne  $M_k$ -augmentante dans  $G$ . Par la question 5,  $M_k$  est bien un couplage maximal dans  $G$ .