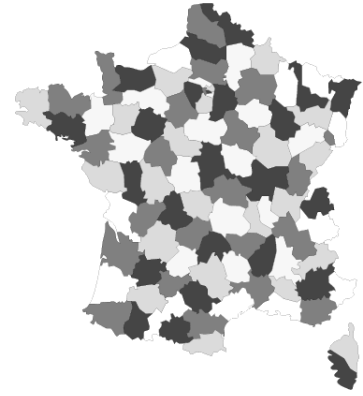


Exercice 1. Théorème des 5 couleurs

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté tel que $S \neq \emptyset$, soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $c : S \rightarrow \llbracket 1; k \rrbracket$. On dit que c est un k -coloriage de G lorsque pour tout $u, v \in S$, si u et v sont adjacents alors $c(u) \neq c(v)$.



1. (a) Déterminer une conditions nécessaire et suffisante pour que G soit 1-coloriable.
- (b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il n'existe aucun k pour lequel G est k -coloriable.

On appelle **nombre chromatique** de G le plus petit entier χ tel que G est χ -coloriable.

2. Soit G un arbre. Déterminer le nombre chromatique de G .

On appelle **graphe planaire** un graphe sans boucle pouvant être dessiné dans le plan sans que deux arêtes ne se croisent. Par exemple, le graphe de la figure 1 est planaire alors que le graphe de la figure 4 n'est pas planaire. De plus, contrairement aux apparences, le graphe de la figure 2 est planaire. En effet, les figures 2 et 3 représentent le même graphe. Puisque le graphe de la figure 3 est planaire, le graphe de la figure 2 l'est aussi.

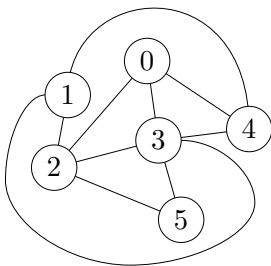


FIGURE 1

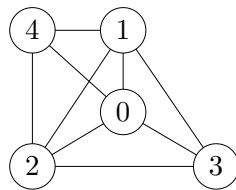


FIGURE 2

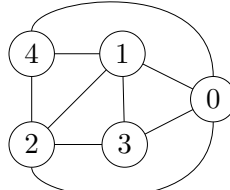


FIGURE 3

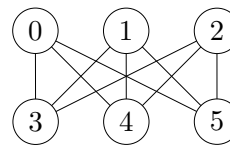


FIGURE 4

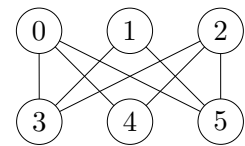


FIGURE 5

3. Montrer que le graphe de la figure 5 est planaire.

Dans la suite, on admet que si $G = (S, A)$ est un graphe planaire connexe avec au moins trois sommets, alors $|A| \leq 3|S| - 6$.

4. Soit G un graphe complet avec $n \in \mathbb{N}^*$ sommets. G est-il planaire ?
5. Soit $G = (S, A)$ un graphe planaire.
 - (a) Montrer qu'il existe au moins un sommet de G dont le degré est inférieur ou égal à 5.
 - (b) Montrer que G est 6-coloriable (ce résultat s'appelle le "théorème des 6 couleurs").
6. (a) Soit $G = (S, A)$ un graphe (pas nécessairement planaire), soient u, v deux sommets et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'une des deux conditions suivantes est réalisée :
 - (i) Il existe un k -coloriage c de G tel que $c(u) = c(v)$.
 - (ii) Pour tout k -coloriage c de G , il existe un chemin de u à v n'utilisant que deux couleurs.
- (b) Montrer que tout graphe planaire est 5-coloriable (ce résultat s'appelle le "théorème des 5 couleurs").

Remarque. Le théorème des 4 couleurs a été démontré en 1976 avec des arguments similaires et en résolvant par ordinateur les 1478 cas de la démonstration.

Exercice 2. Cliques et anti-cliques

Dans cet exercice, $G = (S, A)$ est un graphe non orienté sans boucle avec $S \neq \emptyset$. Pour $S' \subset S$, on dira que :

- S' est une **clique**, si le sous-graphe engendré par S' est complet.
- S' est une **anti-clique**, si le sous-graphe engendré par S' ne contient aucune arête.

1. Soient $p \geq 1$ et $q \geq 1$ deux entiers. Montrer qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que tout graphe avec plus de n sommets admet une clique de cardinal p ou une anti-clique de cardinal q .

Remarque. Le résultat de la question 1 est un cas particulier du “théorème de Ramsey”.

On s'intéresse maintenant au cas où G possède une infinité de sommets.

2. Soit F l'ensemble des sommets de G dont le degré est fini. Montrer que si F est infini, alors G admet une anti-clique infinie.
3. Montrer que si G ne contient pas d'anti-clique infinie, alors G contient une clique infinie.

Exercice 3. Maille d'un graphe

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté avec $|S| \geq 3$ contenant au moins un cycle. On appelle **maille** de G le plus petit entier $g \in \mathbb{N}^*$ tel qu'il existe un cycle de longueur g dans G .

1. Soit $d \in \mathbb{N}^*$ la distance maximale entre deux sommets de G . Montrer que $g \leq 2d + 1$.
2. (a) On suppose qu'il existe une arête $a \in A$ empruntée par tous les cycles élémentaires de G . Montrer que $|A| \leq |S|$.
- (b) On suppose que $|A| \geq |S| + 1$. Montrer que $g \leq \left\lfloor \frac{2(|S| + 1)}{3} \right\rfloor$

Soit $u_0 \in S$ un sommet quelconque de G . Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $S_k \subset S$ l'ensemble des sommets à distance k de u_0 :

$$S_k = \{u \in S : \text{dist}(u, u_0) = k\}$$

3. (a) Montrer que pour tout $k \in \left[1 ; \left\lceil \frac{g-1}{2} \right\rceil - 1\right]$ et tout $v \in S_k$:

$$\text{card}(\Gamma(v) \cap S_{k+1}) = \deg(v) - 1$$

- (b) Montrer que pour tout $k \in \left[0 ; \left\lceil \frac{g-2}{2} \right\rceil - 1\right]$ et tout $u, v \in S_k$ tels que $u \neq v$:

$$\Gamma(u) \cap \Gamma(v) \cap S_{k+1} = \emptyset$$

4. Soit d le degré minimal dans G . On suppose que $g \geq 3$ et $d \geq 3$.

- (a) Dans le cas où g est impair, montrer que :

$$|S| \geq 1 + d \frac{(d-1)^{\frac{g-1}{2}} - 1}{d-2}$$

- (b) Dans le cas où g est pair, montrer que :

$$|S| \geq 2 \frac{(d-1)^{g/2} - 1}{d-2}$$

Indication. Soit $\{u_0, v_0\} \in A$ une arête quelconque de G . Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $S'_k \subset S$ l'ensemble des sommets à distance k de u_0 et v_0 :

$$S'_k = \{u \in S : \min(\text{dist}(u, u_0), \text{dist}(u, v_0)) = k\}$$

Pour montrer le résultat de la question 4b, il faut procéder comme dans les questions 3a, 3b et 4a en utilisant l'ensemble S'_k à la place de S_k .