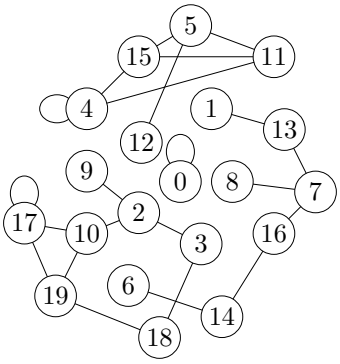


Figure 1

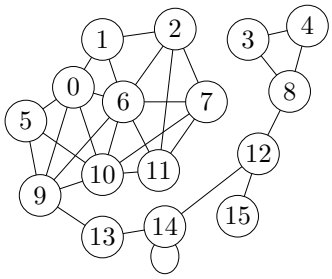


Figure 2

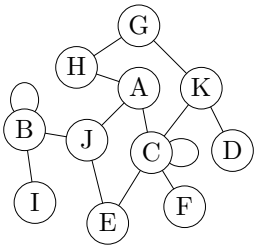


Figure 3

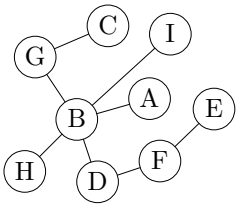


Figure 4

Exercice 1.

Cet exercice est à traiter sur feuille. On s'intéresse au graphe de la figure 3.

1. Pour un parcours en largeur ayant pour sommet initial A :
   (a) Quel est l'ordre dans lequel les sommets sont visités ? Si lors d'une étape plusieurs choix sont possibles, on visitera en priorité le premier sommet dans l'ordre alphabétique. En déduire les distances entre A et tous les autres sommets.
   (b) Comme dans le cours, donner un tableau représentant l'évolution des sommets noirs et gris.
2. Pour un parcours en profondeur ayant pour sommet initial A :
   (a) Quel est l'ordre dans lequel les sommets sont visités ? Si lors d'une étape plusieurs choix sont possibles, on visitera en priorité le $\boxed{\text{dernier}}$ sommet dans l'ordre alphabétique.
   (b) Comme dans le cours, donner un tableau représentant l'évolution des sommets noirs et gris.

Exercice 2. Composantes connexes

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté. Une ***composante connexe*** est un ensemble de sommets non vide $S' \subset S$ tel que :

- ⋆ Pour tout $s_1 \in S'$ et tout $s_2 \in S'$, il existe une chaîne de s_1 à s_2 dans G.
- ⋆ Pour tout $s_1 \in S'$ et tout $s_2 \in S \setminus S'$, il n'existe pas de chaîne de s_1 à s_2 dans G.

On admet que l'ensemble des sommets peut toujours être partitionné comme une union disjointe de composantes connexes :

$$S = \bigcup_{i=1}^{k} S_i \qquad \text{où} \qquad \begin{cases} \text{Pour tout } i,\ S_i \text{ est une composante connexe.} \\ \text{Pour tout } i \neq j : S_i \cap S_j = \varnothing. \end{cases}$$

On admet également que pour tout sommet $s \in S$, il existe une unique composante connexe $S' \subset S$ telle que $s \in S'$.

1. Déterminer les différentes composantes connexes du graphe de la figure 1.

Dans la suite, on suppose que l'ensemble des sommets est de la forme $S = [\![0; n-1]\!]$ avec $n \in \mathbb{N}$. En Python, une composante connexe sera représentée par une liste de type `list[int]` et l'ensemble des composantes connexes par une liste de type `list[list[int]]` (chaque sous-liste est l'une des composantes connexes).

2. À l'aide de parcours en profondeur, proposer un pseudo-code pour déterminer les composantes connexes de G.

Récupérez le fichier annexe sur la page du cours (il contient la représentation Python des quatre graphes ci-dessus) :

`https://informatique-lhp.fr/itc-mpsi.html`

3. Dans cette question, on suppose que G est décrit par sa matrice d'adjacence « `M: list[list[int]]` ».
   (a) Écrire une fonction **récursive** qui prend en entrée `M` ainsi qu'un sommet initial $s \in S$ et renvoie la liste des sommets visités lors d'un parcours en profondeur à partir de s. Il s'agit donc d'implémenter l'algorithme récursif décrit en cours.
   (b) En suivant la procédure de la question 2, écrire une fonction qui prend en entrée `M` et renvoie la liste des composantes connexes de G.
   (c) En déduire une fonction qui indique si G est connexe.

Exercice 3. Prédécesseurs dans un parcours de graphe

Dans tout l'exercice, on s'intéresse à $G = (S, A)$ un graphe non orienté et on lance un parcours en largeur de G (en réalité, on pourrait tout autant utiliser un parcours en profondeur). Soient s et t deux sommets. On dit que s est le ***prédécesseur*** de t si s est le voisin de t qui a permis de découvrir t lors du parcours. Ainsi, à chaque fois qu'un sommet $s \in S$ est visité, s devient le prédécesseur de tous ses voisins qui n'avaient pas encore été découverts.

1. Dans cette question, G est le graphe de la figure 3 et on s'intéresse au parcours en largeur trouvé dans l'exercice 1. Indiquer le prédécesseur de chacun des sommets de G pour ce parcours.

En Python, les graphes seront décrits par listes d'adjacence. Ainsi, si on note `t` le type utilisé pour représenter les sommets, alors on dispose d'un dictionnaire « `d_G: dict[t: list[t]]` » tel que `d_G[s]` est la liste des voisins de `s` dans G. Étant donné G, on lance un parcours en largeur à partir d'un sommet initial s_0 et on note « `P: dict[t: t]` » le dictionnaire qui associe à chaque sommet son prédécesseur dans le parcours.

2. Écrire une fonction qui prend en entrée G ainsi que s_0, et renvoie `P`.

Dans la suite, on va voir plusieurs applications de la notion de prédécesseur.

Application 1 : recherche d'une chaîne entre deux sommets.

3. (a) Soient s et t deux sommets de G. En utilisant la notion de prédécesseurs, expliquer comment construire une chaîne élémentaire entre s et t (c'est à dire une chaîne dont tous les sommets sont distincts deux à deux).
   (b) Dans le cas où le parcours utilisé est un parcours en largeur, que peut-on dire de la chaîne construite ?
   (c) Écrire une fonction qui prend en entrée G, s, t et renvoie une chaîne entre s et t. Votre fonction renverra `None` s'il n'y a pas de chaîne entre s et t.

Application 2 : construction d'un arbre couvrant. On souhaite construire un ***arbre couvrant*** de G, c'est à dire un graphe non orienté $G' = (S', A')$ avec $S' = S$ et $A' \subset A$ qui soit connexe et sans cycle.

4. (a) Proposer un arbre couvrant pour le graphe de la figure 3 et pour le graphe de la figure 4.
   (b) On suppose que G n'est pas connexe. Déterminer tous les arbres couvrants de G.
5. On suppose que G est connexe.
   (a) En utilisant la notion de prédécesseurs, expliquer comment construire un arbre couvrant pour G.
   (b) Qu'obtient-on dans le cas du parcours en largeur trouvé dans l'exercice 1 ?
   (c) Écrire une fonction qui prend en entrée G ainsi qu'un sommet s_0, et renvoie un dictionnaire « `d_AC: dict[t: list[t]]` » contenant les listes d'adjacence de l'arbre couvrant obtenu à partir d'un parcours en largeur ayant pour sommet initial s_0.

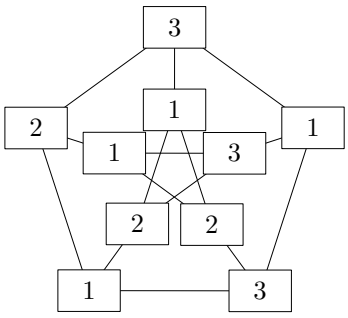
Application 3 : détection de cycles. On appelle ***cycle élémentaire*** un cycle dont tous les sommets sont distincts (mis à part le premier et le dernier sommets). On admet que G admet un cycle si et seulement s'il admet un cycle élémentaire. Notre but est de déterminer si G contient un cycle et si c'est le cas d'en construire un cycle élémentaire. Pour cela, on commence par construire un graphe $G' = (S', A')$ avec $S' = S$ et $A' \subset A$ tel que :

→ G' ne contient pas de cycle.

→ Les composantes connexes de G et de G' sont identiques.

6. (a) En s'inspirant de l'exercice 2 et des question précédentes, décrire une procédure pour construire la graphe G'.
   (b) Supposons que le graphe G' ait été construit. Expliquer comment construire un cycle élémentaire de G (si un tel cycle existe).
   (c) Écrire une fonction qui prend en entrée `d_G` et renvoie un cycle élémentaire de G. Si G ne contient pas de cycle, votre fonction renverra `None`.

Exercice 4. Coloration d'un graphe



Colorer un graphe consiste à attribuer à chaque sommet une couleur en s'interdisant de donner la même couleur à deux sommets voisins. Dans cet exercice, les couleurs seront représentées par les entiers $1, 2, 3, \ldots$ Par exemple, dans la figure ci-contre, le graphe est coloré à l'aide de 3 couleurs.

On décide dans un premier temps de trouver une coloration à l'aide d'un algorithme glouton. Les sommets du graphe sont visités successivement en suivant un parcours en profondeur, et à chaque fois qu'un sommet est visité, on lui attribue la plus petit couleur qui n'apparaît pas dans son voisinage.

1. Écrire une fonction qui prend en entrée un graphe G et construit une coloration de G avec l'algorithme glouton.

Le ***nombre chromatique*** d'un graphe non orienté G noté $\chi(G)$ est le nombre minimal de couleurs nécessaires pour colorer G.

2. Le nombre de couleurs obtenu avec l'algorithme glouton est-il nécessairement égal à $\chi(G)$?
3. Écrire une fonction qui prend en entrée un graphe G et renvoie le nombre chromatique de G. On pourra procéder par recherche exhaustive.

Remarque. Le problème de coloration d'un graphe est un problème NP-complet. Le fait de trouver un algorithme de résolution efficace est donc une question ouverte.