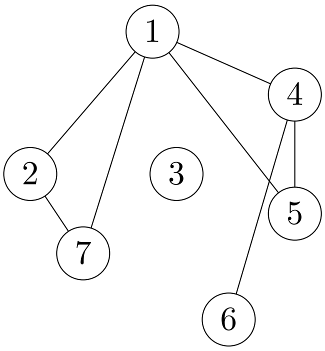
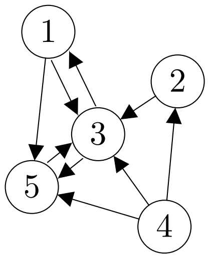
# Exercice 1.

Déterminer les ensembles $S_1, A_1, S_2$ et $A_2$ associés aux graphes suivants :




$G_1 = (S_1, A_1)$




$G_2 = (S_2, A_2)$

# Exercice 2. Le loup, le mouton et le chou

Un homme doit traverser une rivière en barque avec son loup, son mouton et son chou. Malheureusement, la barque ne dispose que de deux places. De plus, si l'homme est d'un côté de la rivière mais que le loup et le mouton sont de l'autre côté, alors le loup mange le mouton. De même, le mouton mange le chou si l'homme les laisse seuls. On cherche donc une stratégie pour que les quatre protagonistes puissent traverser la rivière sans que le mouton ou le chou ne se fassent manger.

1. À l'aide d'un graphe, expliquer comment trouver une stratégie permettant à l'homme de traverser la rivière.

# Exercice 3.

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté sans boucle.

1. Soit $m$ le nombre de sommets de degré impair dans $G$. Montrer que $m$ est pair.
2. Supposons que $|S| \geqslant 2$. Montrer qu'il existe deux sommets avec le même degré.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier. À l'aide d'un graphe, trouver une condition nécessaire et suffisante sur $n$ pour pouvoir construire un groupe de $n$ personnes dans lequel chaque personne est amie avec exactement 5 autres personnes. Dans cette question, on considère que si $A$ est ami avec $B$ alors $B$ est ami avec $A$.

# Exercice 4. Soirée entre amis

Quatre couples d'amis organisent une soirée durant laquelle certains des convives se serrent la main. À la fin de la soirée, Alice demande à chacune des sept autres personnes le nombre de mains qu'elle a serré et reçoit sept réponses différentes. On suppose qu'aucune personne n'a serré la main de son compagnon.

1. Déterminer le nombre de mains qu'a serré Bob, le compagnon d'Alice.

# Exercice 5.

Un ***chemin élémentaire*** est un chemin qui ne repasse pas deux fois par le même sommet.

1. Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté. Montrer que s'il existe un chemin entre deux sommets $s_1$, $s_2$ alors il existe un chemin élémentaire entre $s_1$ et $s_2$.
2. Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté non vide. On suppose que pour tout sommet $s \in S$, le degré sortant de $s$ vérifie $\deg_+(s) \geqslant 1$. Montrer que $G$ contient un circuit non vide.
3. Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté connexe non vide. Soit $n$ la longueur maximale d'une chaîne élémentaire dans $G$. Soient $\gamma_1$ et $\gamma_2$ deux chaînes élémentaires de longueur $n$. Montrer que $\gamma_1$ et $\gamma_2$ possèdent au moins un sommet en commun.

# Exercice 6. Arbres

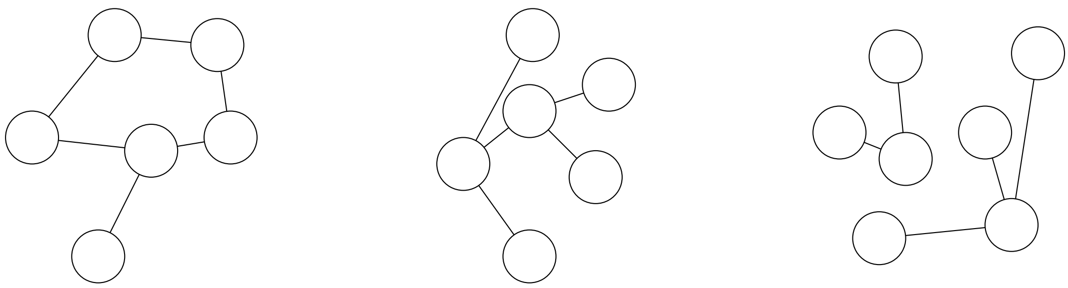
Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté. On définit les notions suivantes :

→ $G$ est un ***arbre*** s'il est connexe et ne contient pas de cycle.

→ Une chaîne ou un cycle est ***élémentaire*** si ses sommets sont distincts deux à deux.

→ Soit $\gamma = (u_0, u_1, \ldots, u_n)$ une chaîne de $G$. Une ***sous-chaîne*** de $\gamma$ est une chaîne de la forme $\gamma' = (u_{i_0}, u_{i_1}, \ldots, u_{i_m})$ avec $i_0 < i_1 < \ldots < i_m$. En particulier, pour vérifier qu'un uplet $\gamma'$ est une sous-chaîne, il faut vérifier que deux sommets consécutifs dans $\gamma'$ sont voisins dans $G$.

1. Parmi les trois graphes suivants, déterminer lesquels sont des arbres :



$G_1$ $\qquad$ $G_2$ $\qquad$ $G_3$

2. Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté.
   (a) Soit $\gamma$ une chaîne entre deux sommets $s_1$ et $s_2$. Montrer qu'il existe une sous-chaîne élémentaire de $\gamma$ qui relie $s_1$ et $s_2$.
   (b) On suppose que $G$ contient un cycle $\gamma$. Soient $s_1$ et $s_2$ deux sommets distincts de $\gamma$. Montrer qu'il existe deux chaînes élémentaires $\gamma_1, \gamma_2$ entre $s_1$ et $s_2$ telles que $\gamma_1$ et $\gamma_2$ ne partagent aucune arête.
   (c) Soient $(s_1, s_2) \in S^2$ deux sommets. On suppose qu'il existe deux chaînes élémentaires distinctes entre $s_1$ et $s_2$. Montrer qu'il existe un cycle élémentaire dans $G$.
3. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   ($P_1$) $G$ est un arbre.
   ($P_2$) $G$ est minimal connexe. C'est à dire que $G$ est connexe et pour tout $a \in A$, le graphe $G' = (S, A \setminus \{a\})$ n'est pas connexe.
   ($P_3$) $G$ est maximal acyclique. C'est à dire que $G$ est sans cycle et pour tout $(s_1, s_2) \in S^2$, si $s_1$ et $s_2$ ne sont pas adjacents dans $G$ alors le graphe $G' = (E, A \cup \{\{s_1; s_2\}\})$ contient un cycle.
   ($P_4$) Pour tout couple de sommets $(s_1, s_2) \in S^2$, il existe une unique chaîne élémentaire de $s_1$ à $s_2$.