Exercice 1.

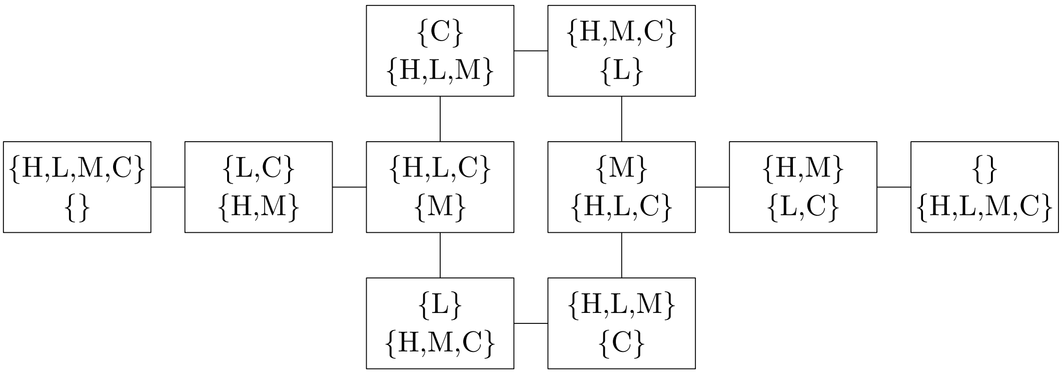
On a :

$$\begin{aligned}
S_1 &= \{1,2,3,4,5,6,7\} \\
A_1 &= \{\{1,2\},\{1,4\},\{1,5\},\{1,7\},\{2,7\},\{4,5\},\{4,6\}\} \\
S_2 &= \{1,2,3,4,5\} \\
A_2 &= \{(1,3),(1,5),(2,3),(3,1),(3,5),(4,2),(4,3),(4,5),(5,3)\}
\end{aligned}$$

Exercice 2. Le loup, le mouton et le chou

Question 1 – Chaque configuration possible va être représentée par un couple (E_1, E_2) où E_1 (resp. E_2) est l'ensemble des protagonistes à gauche (resp. droite) de la rivière. Par exemple, le couple $(\{L, C\}, \{H, M\})$ signifie que le loup et le chou sont à gauche de la rivière, et que l'homme et le mouton sont à droite de la rivière. La configuration initiale est $(\{H, L, M, C\}, \{\})$ et la configuration que l'on souhaite atteindre est $(\{\}, \{H, L, M, C\})$.

Pour modéliser le problème, on utilise un graphe non orienté dont les sommets sont toutes les configurations possibles. Une arête relie deux configurations s'il est possible de passer de l'une à l'autre avec une traversée en barque. À chaque étape, l'homme peut traverser la rivière seul, ou bien la traverser avec le loup, le mouton ou le chou. Voici le graphe obtenu :



Pour trouver une stratégie, il suffit de trouver une chaîne dans le graphe qui part de la configuration $(\{H, L, M, C\}, \{\})$ et qui arrive à la configuration $(\{\}, \{H, L, M, C\})$. Il y a donc deux possibilités (sans repasser deux fois par la même configuration).

Exercice 3.

Question 1 – Soit $S_1 \subset S$ (resp. $S_2 \subset S$) l'ensemble des sommets de degré pair (resp. impair) dans G. En particulier, on a $|S_2| = m$. Ainsi :

$$2|A| = \sum_{s\in S} \deg(s) = \sum_{s\in S_1} \deg(s) + \sum_{s\in S_2} \deg(s)$$

On réduit modulo 2 :

$$\begin{aligned}
0 &\equiv \sum_{s\in S_1} \deg(s) + \sum_{s\in S_2} \deg(s) \mod 2 \\
&\equiv \sum_{s\in S_1} 0 + \sum_{s\in S_2} 1 \mod 2 \\
&\equiv m \mod 2
\end{aligned}$$

En d'autres termes, m est pair.

Question 2 – Supposons par l'absurde que tous les sommets de G aient un degré différent. Étant donné qu'il n'y a pas de boucle dans le graphe, pour tout $s \in S$: $\deg(s) \in [\![0; n-1]\!]$. Donc il existe un sommet s_1 de degré 0 et un sommet s_2 de degré $n-1$. Puisque $n \geqslant 2$, $0 \neq n-1$ et donc $s_1 \neq s_2$. Le sommet s_1 est voisin de tous les autres sommets (en particulier de s_2) ce qui est impossible puisque s_2 n'a pas de voisin. On a donc une contradiction.

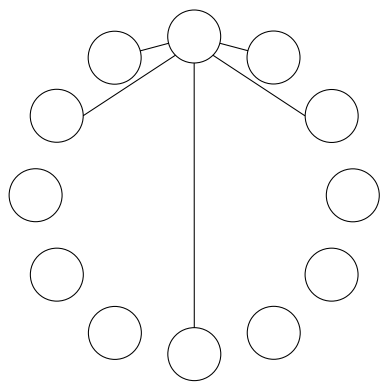
Question 3 – Le groupe est représenté par un graphe non orienté $G = (S, A)$ tel que S est l'ensemble des personnes et tel que $\{s_1, s_2\} \in A$ si et seulement si s_1 et s_2 sont amis.

Il s'agit donc de trouver une condition nécessaire et suffisante sur n pour pouvoir construire un graphe $G = (S, A)$ avec $|S| = n$ et $\deg(s) = 5$ pour tout $s \in S$.

Si $n \leqslant 5$, c'est impossible. D'après la question 1, n est nécessairement pair.

Soit $n \geqslant 6$ un entier pair, montrons qu'il est possible de construire un tel graphe.

On pose $S = [\![0; n-1]\!]$. Schématiquement, on dispose les sommets en cercle. Chaque sommet est relié aux deux sommets qui se trouvent à sa gauche, aux deux sommets qui se trouvent à sa droite et au sommet qui se trouve en face :



Formellement, pour $m \in \mathbb{Z}$, on note $m\%n$ le reste dans la division euclidienne de m par n. Alors, l'ensemble des voisins d'un sommet $i \in [\![0; n-1]\!]$ est :

$$\Gamma(i) = \left\{(i-2)\%n, (i-1)\%n, (i+1)\%n, (i+2)\%n, (i+\frac{n}{2})\%n\right\}$$

On remarque que si i est voisin de j alors j est voisin de i (en réalité il faudrait le montrer), donc le graphe est bien non orienté. De plus $|\Gamma(i)| = 5$ (les éléments de l'ensemble sont distincts) puisque $n \geqslant 5$.

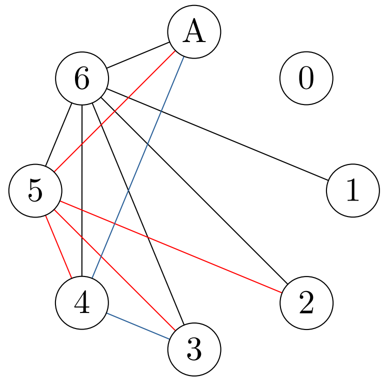
En conclusion, le groupe de n personnes peut être construit si et seulement si $\boxed{n \geqslant 5 \text{ et } n \text{ est pair}}$.

Exercice 4. Soirée entre amis

Question 1 – On représente ces informations par un graphe non orienté dont les sommets sont les convives et tel que deux sommets sont reliés par une arête s'ils se sont serrés la main. Pour chaque personne, le nombre de mains qu'elle a serré est alors le degré du sommet associé.

Comme une personne ne serre pas la main de son compagnon (ni de lui-même), le degré d'un sommet est au plus 6. Comme Alice a reçu sept réponses différentes, elle a reçu toutes les réponses de 0 à 6 exactement une fois.

Il s'agit donc de construire un graphe non orienté avec 8 sommets dont les degrés sont 0,1,2,3,4,5,6 et d avec d quelconque (d est le degré d'Alice). Le seule possibilité est le graphe suivant où les sommets sont étiquetés par leurs degrés :



Pour construire le graphe ci-dessus, on a procédé de la manière suivante :

- Le sommet de degré 6 est relié à tous les autres sommets sauf le sommet de degré 0. Cela permet d'ajouter les 6 arêtes noires. Le sommet de degré 1 n'est donc relié qu'au sommet de degré 6.
- Le sommet de degré 5 est relié à tous les sommets sauf aux sommets de degrés 0 et 1. Cela permet d'ajouter les 4 arêtes rouges. Le sommet de degré 2 n'est donc relié qu'aux sommets de degrés 5 et 6.
- Le sommet de degré 4 est relié à tous les sommets sauf aux sommets de degrés 0, 1 et 2. Cela permet d'ajouter les 2 arêtes bleues. Le sommet de degré 3 n'est donc relié qu'aux sommets de degrés 4, 5 et 6.

Puisqu'une personne ne serre pas la main de son compagnon :

- Le sommet de degré 6 est le compagnon du sommet de degré 0.
- Le sommet de degré 5 est le compagnon du sommet de degré 1.
- Le sommet de degré 4 est le compagnon du sommet de degré 2.

En conclusion Bob a serré 3 mains.

Exercice 5.

Question 1 – Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des chemins de s_1 à s_2. Par hypothèse, $\mathcal{C}$ est non vide, on peut donc définir $\gamma \in \mathcal{C}$ un chemin de longueur minimale parmi les éléments de $\mathcal{C}$. Soit u_i les sommets de γ :

$$\gamma = (u_0, u_1, \ldots, u_n).$$

Supposons par l'absurde que γ n'est pas élémentaire. Alors il existe $0 \leqslant i < j \leqslant n$ tel que $u_i = u_j$. Soit γ' le chemin γ auquel on a enlevé les sommets $u_{i+1}, \ldots, u_j$:

$$\gamma' = (u_0, \ldots, u_{i-2}, u_{i-1}, u_i, u_{j+1}, u_{j+2} \ldots, u_n).$$

On remarque que γ' est un chemin de $u_0 = s_1$ à $u_n = s_2$ (en particulier, u_i et u_{j+1} sont bien reliés par une arête car $u_i = u_j$). Comme $i < j$, la longueur de γ' est strictement inférieure à n ce qui contredit la minimalité de n. On a une contradiction donc γ est élémentaire.

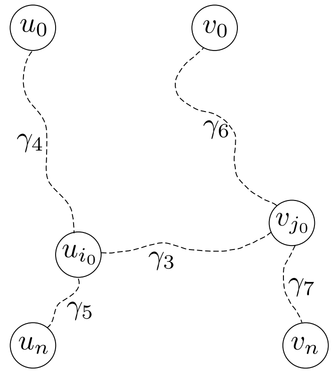
Question 2 – Soit $\gamma_0 = (s_0, \ldots s_n)$ un chemin élémentaire de longueur maximale. On sait que $\deg_+(s_n) \geqslant 1$, donc il existe un sommet s_{n+1} tel que $(s_n, s_{n+1}) \in A$. À cause de l'hypothèse sur la maximalité de n, le chemin $(s_0, \ldots s_n, s_{n+1})$ ne peut pas être élémentaire. Ainsi, il existe $i \in [\![0; n]\!]$ tel que $s_i = s_{n+1}$.

Le chemin $\gamma = (s_i, s_{i+1}, \ldots, s_n, s_{n+1})$ est alors un circuit non vide de G.

Question 3 – On note u_i les sommets de γ_1 et v_j les sommets de γ_2 :

$$\gamma_1 = (u_0, u_1, \ldots, u_n), \qquad \gamma_2 = (v_0, v_1, \ldots, v_n).$$

Soit $\gamma_3 = (w_0, w_1, \ldots w_k)$ la plus petite chaîne entre un sommet de γ_1 et un sommet de γ_2. Par minimalité de k, w_i n'appartient pas à γ_1 pour tout $i > 0$ et w_i n'appartient pas à γ_2 pour tout $i < k$. De plus, avec le même raisonnement que dans la question 1, on sait que γ_3 est une chaîne élémentaire.



Soit $i_0 \in [\![0;n]\!]$ tel que $u_{i_0} = w_0$ et $j_0 \in [\![0;n]\!]$ tel que $v_{j_0} = w_k$. On obtient alors 4 chaînes :

$$\begin{aligned}
\gamma_4 &= (u_0, u_1, \dots u_{i_0-1}, u_{i_0}) \\
\gamma_5 &= (u_n, u_{n-1}, \dots u_{i_0+1}, u_{i_0}) \\
\gamma_6 &= (v_{j_0}, v_{j_0-1}, \dots v_1, v_0) \\
\gamma_7 &= (v_{j_0}, v_{j_0+1}, \dots v_{n-1}, v_n)
\end{aligned}$$

On note $\mathrm{long}(\gamma)$ la longueur d'une chaîne, alors :

$$\mathrm{long}(\gamma_4) + \mathrm{long}(\gamma_5) = i_0 + (n - i_0) = n \qquad \mathrm{long}(\gamma_6) + \mathrm{long}(\gamma_7) = j_0 + (n - j_0) = n$$

Dans la suite, on suppose que $\mathrm{long}(\gamma_4) \geqslant \mathrm{long}(\gamma_5)$ et que $\mathrm{long}(\gamma_6) \geqslant \mathrm{long}(\gamma_7)$ (les trois autres cas se traitent de la même façon). Alors :

$$\mathrm{long}(\gamma_4) \geqslant \lceil n/2 \rceil \qquad \mathrm{long}(\gamma_6) \geqslant \lceil n/2 \rceil$$

Soit γ la chaîne qui consiste à parcourir la chaîne γ_4, puis la chaîne γ_3, puis la chaîne γ_6. Alors :

$$\mathrm{long}(\gamma) = \mathrm{long}(\gamma_4) + \mathrm{long}(\gamma_3) + \mathrm{long}(\gamma_6) \geqslant \frac{n}{2} + k + \frac{n}{2} = n + k$$

Si on suppose par l'absurde que γ_1 et γ_2 n'ont pas de sommet en commun, alors γ est une chaîne élémentaire et donc $\mathrm{long}(\gamma) \leqslant n$. On en déduit que $k = 0$, c'est à dire que $\mathrm{long}(\gamma_3) = 0$ donc $u_{i_0} = w_0 = w_k = v_{j_0}$, ce qui constitue une contradiction, puisque $u_{i_0} = v_{j_0}$ serait un sommet en commun entre γ_1 et γ_2.

Exercice 6. Arbres

Question 1 –
G_1 n'est pas un arbre car il contient un cycle.
G_2 est un arbre.
G_3 n'est pas un arbre car il n'est pas connexe.

Question 2.a – On montre la propriété par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la longueur de la chaîne γ :

- → Initialisation. Si $n = 0$ alors γ est déjà une chaîne élémentaire.
- → Hérédité. Soit $n > 0$. On suppose la propriété vraie pour toute chaîne de longueur strictement inférieure à n et on la montre pour une chaîne $\gamma = (u_0, u_1, \dots, u_n)$ de longueur n. Si γ est élémentaire, $\gamma' = \gamma$ convient. Sinon, il existe $i < j$ tels que $u_i = u_j$. On définit $\gamma' = (u_0, u_1, \dots, u_{i-2}, u_{i-1}, u_i = u_j, u_{j+1}, u_{j+2}, \dots, u_{n-1}, u_n)$. γ' est une chaîne de longueur strictement inférieur à n qui relie u_0 et u_n. Par hypothèse de récurrence il existe γ'' une sous-chaîne élémentaire de γ' qui relie u_0 à u_n. La chaîne γ'' est bien une sous-chaîne élémentaire de γ.

Question 2.b – Soit γ un cycle et $s_1 \neq s_2$ deux sommets de γ. Le cycle γ est de la forme $\gamma = (u_0, u_1, \dots, u_n)$ avec $s_1 = u_{i_1}$, $s_2 = u_{i_2}$ où $i_1, i_2 \in [\![0, n]\!]$ sont deux entiers distincts. Sans perte de généralité, on peut supposer que $i_1 < i_2$. On a alors deux chaînes entre s_1 et s_2 :

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= (u_{i_1}, u_{i_1+1}, \dots, u_{i_2-1}, u_{i_2}) \\
\gamma_2 &= (u_{i_1}, u_{i_1-1}, \dots, u_2, u_1, u_0 = u_n, u_{n-1}, u_{n-2}, \dots, u_{i_2+1}, u_{i_2})
\end{aligned}$$

De plus, comme γ est un cycle, ses arêtes sont distinctes deux à deux et donc γ_1 et γ_2 n'ont pas d'arête en commun. On conclut en utilisant la question 2.a pour obtenir deux chaîne élémentaires.

Question 2.c – Soient $\gamma_1 = (u_0, u_1, \dots, u_{k_1})$ et $\gamma_2 = (v_0, v_1, \dots, v_{k_2})$ deux chaînes élémentaires distinctes de G reliant le sommet $s_1 = u_0 = v_0$ à $s_2 = u_{k_1} = v_{k_2}$. On a $s_1 \neq s_2$, en effet il n'existe qu'une seule chaîne élémentaire qui relie un sommet à lui même (la chaîne vide). Attention : rien ne garantit que $u_1 \neq v_1$.

Puisque γ_1 et γ_2 sont distinctes, l'ensemble :

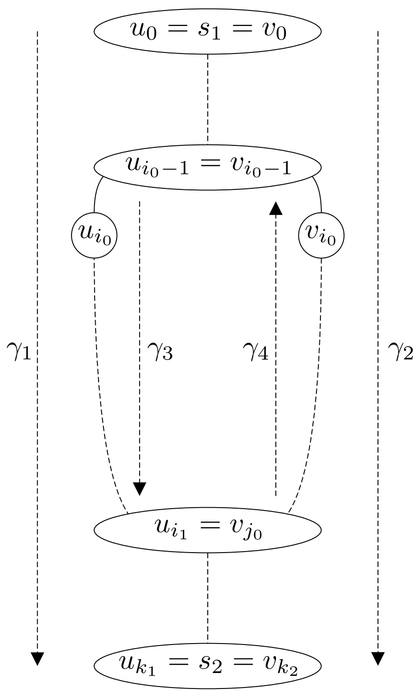
$$I_0 = \Big\{ i \in [\![1; \min(k_1, k_2)]\!] : u_i \neq v_i \Big\}$$

est non vide. On pose $i_0 = \min(I_0)$. Puisque $u_{k_1} = v_{k_2}$, l'ensemble

$$I_1 = \Big\{ i \in [\![i_0; k_1]\!] : u_i \in \{v_{i_0}, v_{i_0+1}, \dots, v_{k_2}\} \Big\}$$

est non vide. On pose $i_1 = \min(I_1)$. Comme γ_2 est élémentaire, il existe un unique $j_0 \in [\![i_0; k_2]\!]$ tel que $u_{i_1} = v_{j_0}$. On a alors deux chaînes élémentaires :

$$\gamma_3 = (u_{i_0-1}, u_{i_0}, u_{i_0+1}, \dots, u_{i_1-1}, u_{i_1})$$
$$\gamma_4 = (v_{j_0}, v_{j_0-1}, \dots, v_{i_0+1}, v_{i_0}, v_{i_0-1}).$$



Soit γ la concaténation de γ_3 et γ_4. La longueur de la chaîne γ est non nulle puisqu'elle passe par les trois sommets $u_{i_0-1} = v_{i_0-1}$, u_{i_0} et v_{i_0} qui sont distincts deux à deux. C'est donc un cycle puisque $u_{i_0-1} = v_{i_0-1}$ et $u_{i_1} = v_{j_0}$. Pour montrer que γ est un cycle élémentaire, il reste à montrer qu'il ne repasse pas deux fois par le même sommet.

Par définition de i_1, pour tout $i \in [\![i_0; i_1 - 1]\!]$ et tout $j \in [\![i_0; j_0]\!]$: $u_i \neq v_j$. En utilisant le fait que γ_1 et γ_2 sont élémentaires, on en déduit que γ est élémentaire.

Question 3 – On montre différentes implications.

$\boxed{(P_1) \Rightarrow (P_2)}$ Supposons que G soit un arbre. On sait déjà que G est connexe. Supposons par l'absurde qu'il existe $a \in A$ telle que $G' = (S, A \setminus \{a\})$ soit connexe. Alors $a = \{s_1; s_2\}$ avec $(s_1, s_2) \in S^2$. Comme G' est connexe, il existe une chaîne élémentaire γ de s_1 à s_2. Si on ajoute l'arête a à γ, on obtient un cycle de G ce qui contredit l'hypothèse que G est sans cycle.

$\boxed{(P_1) \Rightarrow (P_3)}$ Supposons que G soit un arbre. On sait déjà que G est sans cycle. Soit $(s_1, s_2) \in S^2$ tels que s_1 et s_2 ne sont pas adjacents dans G. On doit montrer que le graphe $G' = (E, A \cup \{\{s_1; s_2\}\})$ contient un cycle. On sait que G est connexe donc il existe une chaîne γ de s_1 à s_2 dans G. Lorsqu'on ajoute l'arête $\{s_1; s_2\}$ à γ, on obtient un cycle de G'

$\boxed{(P_2) \Rightarrow (P_4)}$ Supposons que G soit minimal connexe. Soit $(s_1, s_2) \in S^2$. Comme G est connexe, la question 2.a assure qu'il existe une chaîne élémentaire de s_1 à s_2. Il s'agit de montrer que cette chaîne est unique.

On suppose par l'absurde qu'il existe deux chaînes élémentaires distinctes reliant s_1 à s_2. Par la question 2.c, il existe un cycle élémentaire $\gamma = (u_0, u_1, \dots, u_k)$ dans G. Soit $a = \{u_0, u_1\}$ alors $a \in A$ car c'est une arête de γ. Montrons que le graphe $G' = (S, A \setminus \{a\})$ est connexe pour aboutir à une contradiction.

La chaîne $\gamma' = (u_1, \dots, u_k)$ est une chaîne élémentaire entre u_1 et $u_k = u_0$ dans G'. Soient $(v_1, v_2) \in S^2$. Comme G est connexe, il existe une chaîne entre v_1 et v_2 dans G. Si cette chaîne ne contient pas l'arête a, c'est aussi une chaîne de G'. Sinon, on remplace a par la chaîne γ' et on obtient une chaîne de G'. Dans les deux cas, il existe une chaîne de v_1 à v_2 dans G'. Donc G' est connexe ce qui est une contradiction.

$\boxed{(P_3) \Rightarrow (P_4)}$ Supposons que G soit maximal acyclique. Soient $(s_1, s_2) \in S^2$.

Le graphe $G' = (E, A \cup \{\{s_1; s_2\}\})$ contient un cycle γ et puisque G est sans cycle, γ contient l'arête $\{s_1; s_2\}$. D'après la question 2.b, il existe deux chaînes γ_1, γ_2 entre s_1 et s_2 qui ne partagent pas d'arête. Ainsi, γ_1 ou γ_2 ne contient pas l'arête $\{s_1, s_2\}$ et est donc une chaîne de G. Finalement, il existe une chaîne de s_1 à s_2 dans G et donc une chaîne élémentaire par la question 2.a.

Il reste à montrer que cette chaîne est unique. On suppose par l'absurde qu'il existe deux chaînes élémentaires distinctes reliant s_1 à s_2. Par la question 2.c, il existe un cycle élémentaire $\gamma = (u_0, u_1, \ldots, u_k)$ dans G ce qui contredit l'hypothèse que G est sans cycle.

$\boxed{(P_4) \Rightarrow (P_1)}$ On suppose (P_4). Le graphe G est connexe puisqu'il existe une chaîne entre toute paire de sommets.

Montrons que G est sans cycle. Par l'absurde, s'il existe un cycle dans G alors la question 2.b permet de construire deux chaînes distinctes reliant les deux mêmes sommets, ce qui contredit (P_4).