Exercice 1. Entiers signés

1. Quel est l'ensemble des nombres représentables en complément à deux sur 64 bits ?
2. Quelle est la représentation complément à deux sur 64 bits des entiers signés 80 et -100 ?
3. Quels sont les entiers dont les représentations complément à deux sur 64 bits sont :

$$(\underbrace{0\dots0}_{\text{57 zéros}}\,100\;1001) \qquad\qquad (\underbrace{1\dots1}_{\text{58 uns}}00\;1001)$$

Exercice 2. Conversion de réels

1. Quelles sont les représentations `binary64` de -7.6875 et 2^{-1022} ?
2. Quels sont les nombres dont les représentations `binary64` sont :

$$(0 \mid 1\underbrace{0\dots0}_{\text{8 zéros}}10 \mid 1101\,\underbrace{0\dots0}_{\text{48 zéros}}), \qquad\qquad (1 \mid 0\underbrace{1\dots1}_{\text{9 uns}}0 \mid 01\,\underbrace{0\dots0}_{\text{50 zéros}}).$$

3. Que vaut le plus petit flottant strictement supérieur à 1 pour la représentation `binary64` ?
4. Quel est le nombre dont l'écriture en base 2 est $(10.1\;110\;110\;110\;\dots)_2$?
   Indication : on pourra déterminer une équation vérifiée par le nombre recherché.
5. Quelle est l'écriture en base 2 de 9.55 ?
   Indication : on pourra multiplier 9.55 par 2 jusqu'à repérer un motif périodique.

Exercice 3. Ségrégation entre moutons

Dans cet exercice on étudie le modèle introduit en 1969 par Thomas Schelling pour modéliser la ségrégation urbaine. On s'intéresse à un pré dans lequel broutent `m` moutons, chaque mouton étant blanc ou noir. Le pré est représenté par une grille composée de `n` lignes et `n` colonnes où chaque case peut être vide ou bien occupée par un mouton.

Un mouton est heureux lorsque la proportion de ses voisins de la même couleur que lui est strictement supérieure à 2/3 (ou bien lorsqu'il n'a pas de voisin). Les voisins d'un mouton sont ceux qui occupent l'une des 8 cases adjacentes, sachant que les bords droit/gauche et haut/bas sont reliés. Par exemple, la case de coordonnées `(0, 1)` est voisine des cases `(0, 2)`, `(1, 2)`, `(1, 1)`, `(1, 0)`, `(0, 0)`, `(n - 1, 0)`, `(n - 1, 1)` et `(n - 1, 2)`.

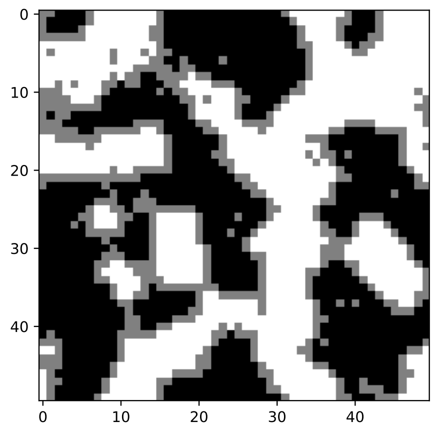
Initialement, les moutons sont placés au hasard dans le pré et chaque mouton a 50% de chances d'être noir et 50% de chances d'être blanc. À chaque étape, l'un des moutons malheureux est sélectionné au hasard et se déplace sur une case inoccupée choisie aléatoirement. Le processus s'arrête lorsque tous les moutons sont heureux ou bien lorsque le nombre maximum d'étapes noté `N` est atteint.

1. Écrire une fonction qui prend en entrée `n` (la dimension du pré), `m` (le nombre de moutons), `N` (le nombre maximal d'étapes) et affiche la situation finale. Pour l'affichage, on pourra s'inspirer du programme donné à la fin de l'énoncé. Testez avec :

   `(n, m, N) = (10, 50, 1000)` puis `(n, m, N) = (50, 2000, 20000)`.

2. (facultatif) Faire en sorte de voir l'évolution de la population au fur et à mesure. Pour cela, on pourra utiliser la commande `plt.clf` (`clf` = clear figure).

```
# pre est une liste de listes.
# pre[i][j] = 0 -> case verte
# pre[i][j] = 1 -> case blanche
# pre[i][j] = 2 -> case noire
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.colors as col
plt.figure()
plt.imshow(
    pre, interpolation='Nearest', vmin=0,
    cmap = col.ListedColormap(['green','white','black']))
plt.pause(0.00001)
plt.show()
```



Exercice 4. Suite de Goodstein

La suite de Goodstein est une suite d'entiers naturels dont le comportement est contre-intuitif : malgré le fait que la suite semble croissante et que les premiers termes sont rapidement gigantesques, elle est nulle à partir d'un certain rang.

Notation héréditaire. Soit $b \geqslant 2$ et $u \geqslant 0$ deux entiers naturels. La notation héréditaire de u en base b est définie récursivement :

→ 0 est la notation héréditaire de $u = 0$.

→ Si $u > 0$ alors pour écrire la notation héréditaire de u en base b :
  - On écrit u en base b.
  - On écrit les exposants de cette décomposition en notation héréditaire en base b.

Par exemple :

$$\begin{aligned} u &= 415 \\ &= 3^5 + 2 \times 3^4 + 3^2 + 3^0 \\ &= 3^{3^1 + 2\times 3^0} + 2 \times 3^{3^1+3^0} + 3^{2\times 3^0} + 3^0 \\ &= 3^{3^{3^0} + 2\times 3^0} + 2 \times 3^{3^{3^0}+3^0} + 3^{2\times 3^0} + 3^0. \end{aligned}$$

La notation héréditaire de $u = 415$ en base $b = 3$ est donc $u = 3^{3^{3^0} + 2\times 3^0} + 2 \times 3^{3^{3^0}+3^0} + 3^{2\times 3^0} + 3^0$.

Suite de Goodstein. Soit $k_0 \in \mathbb{N}$ un entier naturel. La suite de Goodstein de graine k_0 est la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = k_0$ et pour tout $n \geqslant 2$:

→ Si $u_{n-1} = 0$ alors $u_n = 0$.

→ Sinon, u_n est obtenu à partir de u_{n-1} de la manière suivante :
  - On écrit la notation héréditaire de u_{n-1} en base n.
  - On remplace tous les n de la notation héréditaire de u_{n-1} par des $n+1$.
  - On enlève 1 au nombre obtenu.

Par exemple, lorsque $k_0 = 4$:

⋆ $u_1 = k_0 = 4 = 2^{2^{2^0}}$, donc $u_2 = 3^{3^{3^0}} - 1 = 26$.

⋆ $u_2 = 26 = 2 \times 3^{2\times 3^0} + 2 \times 3^{3^0} + 2 \times 3^0$, donc $u_3 = 2 \times 4^{2\times 4^0} + 2 \times 4^{4^0} + 2 \times 4^0 - 1 = 41$.

⋆ $u_3 = 41 = 2 \times 4^{2\times 4^0} + 2 \times 4^{4^0} + 1 \times 4^0$, donc $u_4 = 2 \times 5^{2\times 5^0} + 2 \times 5^{5^0} + 1 \times 5^0 - 1 = 60$.

⋆ ...

1. Écrire une fonction qui prend en entrée la graine k_0 ainsi qu'un entier $n \in \mathbb{N}^*$, et renvoie u_n. Vérifiez que pour $k_0 = 3$:

$$u_1 = 3, \qquad u_2 = 3, \qquad u_3 = 3, \qquad u_4 = 2, \qquad u_5 = 1, \qquad u_6 = 0, \qquad u_7 = 0.$$

Et que pour $k_0 = 10$:

$$u_1 = 10, \qquad u_2 = 83, \qquad u_3 = 1025, \qquad u_4 = 15625, \qquad u_5 = 279935.$$