

Exercice 5.

Question 1 – Le fonction `somLL` renvoie la somme des entiers présents dans `L`, c'est à dire :

$$\sum_{i=0}^{\text{len}(L)-1} \left[\sum_{j=0}^{\text{len}(L[i])-1} L[i][j] \right]$$

Question 2 – La boucle « `for i` » fait `len(L)` tours. De plus, pour chaque $i \in \llbracket 0, \text{len}(L) - 1 \rrbracket$, la boucle « `for j` » fait `len(L[i]) - 1` tours. Finalement, le nombre de tours de boucle est fini et toutes les instructions sont élémentaires donc la fonction termine pour toute entrée `L`.

Question 3.a – Pour $i \in \llbracket 0; \text{len}(L) - 1 \rrbracket$, l'invariant suivant convient :

$$(\mathcal{P}_i) : s_i = \sum_{k=0}^i \left[\sum_{\ell=0}^{\text{len}(L[k])-1} L[k][\ell] \right].$$

Question 3.b – Pour $i \in \llbracket 0; \text{len}(L) - 1 \rrbracket$ et $j \in \llbracket 0; \text{len}(L[i]) - 1 \rrbracket$, l'invariant suivant convient :

$$(\mathcal{Q}_{i,j}) : \begin{cases} s'_{i,j} = \sum_{\ell=0}^j L[i][\ell] & \text{si } i = 0 \\ s'_{i,j} = s_{i-1} + \sum_{\ell=0}^j L[i][\ell] & \text{si } i \in \llbracket 1; \text{len}(L) - 1 \rrbracket \end{cases}$$

Question 3.c –

- Soit $i \in \llbracket 0; \text{len}(L) - 1 \rrbracket$ fixé. Montrons $(\mathcal{Q}_{i,j})$ par itération finie sur $j \in \llbracket 0; \text{len}(L[i]) - 1 \rrbracket$:

Initialisation. Pour $j = 0$:

→ Si $i = 0$ alors $s'_{0,0} = 0 + L[0][0]$ (lignes 4,5,6) et :

$$\sum_{\ell=0}^j L[i][\ell] = L[0][0]$$

d'où $(\mathcal{Q}_{0,0})$.

→ Si $i \in \llbracket 0; \text{len}(L[i]) - 1 \rrbracket$, alors à la fin du tour de boucle « `for i` » précédent, la variable `s` contenait s_{i-1} . Ainsi :

$$s'_{i,j} = s_{i-1} + L[i][0] = s_{i-1} + \sum_{\ell=0}^j L[i][\ell]$$

d'où $(\mathcal{Q}_{i,0})$.

Hérédité. Soit $j \in \llbracket 1; \text{len}(L[i]) - 1 \rrbracket$. On suppose $(\mathcal{Q}_{i,j-1})$ et on montre $(\mathcal{Q}_{i,j})$.

→ Si $i \in \llbracket 1; \text{len}(L) - 1 \rrbracket$ alors $s'_{i,j} = s'_{i,j-1} + L[i][j]$ (ligne 6) donc par l'hypothèse de récurrence :

$$s'_{i,j} = s_{i-1} + \left(\sum_{\ell=0}^{j-1} L[i][\ell] \right) + L[i][j] = s_{i-1} + \left(\sum_{\ell=0}^j L[i][\ell] \right)$$

D'où $(\mathcal{Q}_{i,j})$.

→ Si $i = 0$, la preuve est similaire.

En conclusion, $\mathcal{Q}_{i,j}$ est vraie pour tout $i \in \llbracket 0; \text{len}(L) - 1 \rrbracket$ et $j \in \llbracket 0; \text{len}(L[i]) - 1 \rrbracket$.

- Montrons (\mathcal{P}_i) par itération finie sur $i \in \llbracket 0; \text{len}(L) - 1 \rrbracket$.

Initialisation. Pour $i = 0$, on remarque que $s_0 = s'_{0, \text{len}(L[0])-1}$. En utilisant $(\mathcal{Q}_{0, \text{len}(L[0])-1})$:

$$s_0 = s'_{0, \text{len}(L[0])-1} = \sum_{\ell=0}^{\text{len}(L[0])-1} L[0][\ell] = \sum_{k=0}^0 \left[\sum_{\ell=0}^{\text{len}(L[k])-1} L[k][\ell] \right]$$

Hérédité. Soit $i \in \llbracket 1; \text{len}(L) - 1 \rrbracket$. On suppose (\mathcal{P}_{i-1}) et on montre (\mathcal{P}_i) . On remarque que $s_i = s'_{i, \text{len}(L[i])-1}$. En utilisant $(\mathcal{Q}_{i, \text{len}(L[i])-1})$:

$$s_i = s'_{i, \text{len}(L[i])-1} = s_{i-1} + \sum_{\ell=0}^{\text{len}(L[i])-1} L[i][\ell]$$

Par (\mathcal{P}_{i-1}) :

$$s_i = \sum_{k=0}^{i-1} \left[\sum_{\ell=0}^{\text{len}(L[k])-1} L[k][\ell] \right] + \sum_{\ell=0}^{\text{len}(L[i])-1} L[i][\ell] = \sum_{k=0}^i \left[\sum_{\ell=0}^{\text{len}(L[k])-1} L[k][\ell] \right]$$

Conclusion. \mathcal{P}_i est vraie pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

- À la fin de la fonction, la variable s vaut :

$$s_{\text{len}(L)-1} = \sum_{k=0}^{\text{len}(L)-1} \left[\sum_{\ell=0}^{\text{len}(L[k])-1} L[k][\ell] \right]$$

d'où la correction de la fonction.

Exercice 6. Exponentiation rapide (facultatif)

Question 1 – La quantité $v = m$ est un variant de boucle donc le nombre de tours de boucle est fini. De plus, toutes les opérations sont élémentaires donc la fonction termine.

Question 2 – On montre (\mathcal{P}_k) par récurrence :

Initialisation. Pour $k = 0$, on a :

$$res_0 = 1, \quad y_0 = x, \quad m_0 = n.$$

Donc (\mathcal{P}_0) est vraie.

Hérédité. On suppose (\mathcal{P}_k) et on montre (\mathcal{P}_{k+1}) .

→ Si m_k est pair :

$$\begin{aligned} res_{k+1} \times y_{k+1}^{m_{k+1}} &= res_k \times (y_k^2)^{m_k/2} && \text{Par les lignes 8 et 9} \\ &= res_k \times y_k^{m_k} \\ &= x^n && \text{Par } (\mathcal{P}_k) \end{aligned}$$

→ Sinon, m_k est impair et :

$$\begin{aligned} res_{k+1} \times y_{k+1}^{m_{k+1}} &= y_k \times res_k \times (y_k^2)^{(m_k-1)/2} && \text{Par les lignes 7, 8 et 9} \\ &= res_k \times y_k^{m_k} \\ &= x^n && \text{Par } (\mathcal{P}_k) \end{aligned}$$

Conclusion. Donc (\mathcal{P}_k) est vrai pour tout $k \in \llbracket 0, K \rrbracket$. Pour $k = K$, (\mathcal{P}_K) s'écrit $res_K \times y_K^{m_K} = x^n$. Or, à la fin de la fonction, la condition de la boucle **while** n'est plus vérifiée, donc $m_K = 0$ et on obtient :

$$res_K = x^n$$

Donc la fonction est correcte.

Question 3 – On montre d'abord l'inégalité de gauche :

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{2^i} = \frac{1 - 1/2^k}{2(1 - 1/2)} = 1 - 1/2^k \leq 1.$$

On montre maintenant les deux autres inégalité par récurrence sur $k \in \llbracket 0, K - 1 \rrbracket$:

Initialisation. Pour $k = 0$, on doit montrer que : $n \leq m_0 \leq n$ ce qui est vrai.

Hérédité. On suppose la propriété vraie au rang k et la montre au rang $k + 1$. On a :

$$m_{k+1} = \left\lfloor \frac{m_k}{2} \right\rfloor \geq \frac{m_k - 1}{2} \geq \frac{\frac{n}{2^k} - \sum_{i=1}^k \frac{1}{2^i}}{2} - \frac{1}{2} \quad \text{D'après l'hypothèse de récurrence.}$$

$$= \frac{n}{2^{k+1}} - \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{2^i}$$

De même :

$$m_{k+1} = \left\lfloor \frac{m_k}{2} \right\rfloor \leq \frac{m_k}{2} \leq \frac{n}{2^{k+1}} \quad \text{D'après l'hypothèse de récurrence.}$$

Question 4 – Au début du dernier tour de boucle, on a $m_{K-1} = 1$. Par la question 3 :

$$\frac{n}{2^{K-1}} - 1 \leq 1 \leq \frac{n}{2^{K-1}}.$$

Ainsi, $n \geq 2^{K-1}$ et $n \leq 2^K$. Donc $\log_2 n \geq K - 1$ et $\log_2 n \leq K$. Le nombre de tours de boucle est un $\Theta(\log n)$, toutes les instructions sont élémentaires et s'exécutent en temps constant donc la complexité de la fonction est en $\Theta(\log n)$.