

Exercice 1. Fonction mystère

Question 1 – Il faut que la liste L soit non vide, sinon à la fin de la fonction k vaut 0 et la ligne 7 déclenche une erreur. Lorsque L est non vide, la fonction f renvoie le plus petit élément de L .

Question 2 –

★ Le pire cas correspond au cas où la liste en entrée est strictement décroissante (la ligne 6 est alors exécutée à chaque tour de boucle). Si on pose $n = \text{len}(L)$, on obtient une complexité en :

$$\underbrace{\Theta(n)}_{(a)} \times \underbrace{\Theta(1)}_{(b)} + \underbrace{\Theta(1)}_{(c)} = \Theta(n) + \Theta(1) = \Theta(n)$$

où (a) correspond au nombre de tours de boucles, (b) à la complexité de chaque tour de boucle et (c) à la complexité des opérations en dehors de la boucle.

★ Le meilleur cas correspond au cas où la liste en entrée est croissante (la ligne 6 n'est alors jamais exécutée). La complexité reste la même que dans le pire cas en $\Theta(n)$.

Question 3 – Les tours de boucles sont numérotés de $i = 1$ à $i = n$. Pour chaque $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note k_i la valeur de la variable k à la fin du tour numéro i . L'invariant de boucle est :

$$(\mathcal{P}_i) : L[k_i] \text{ est le minimum de } \{L[j] : 0 \leq j \leq i\}$$

Exercice 2. Somme des produits

Question 1 – Elle renvoie $\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n i \times j$.

Question 2 – La boucle « **for** i » fait n tours. De plus, pour chaque $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la boucle « **for** j » fait $n + 1 - i$ tours. Finalement, le nombre de tours de boucle est fini et toutes les instructions sont élémentaires donc la fonction termine pour tout n .

Question 3 – Le nombre de passages sur la ligne 7 est :

$$c_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n 1 = \sum_{i=1}^n (n + 1 - i)$$

On peut calculer le nombre exact de tours de boucle :

$$c_n = \sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}.$$

La complexité est donc :

$$\underbrace{\Theta(n^2)}_{(a)} \times \underbrace{\Theta(1)}_{(b)} + \underbrace{\Theta(1)}_{(c)} = \Theta(n^2) + \Theta(1) = \Theta(n^2)$$

où (a) correspond au nombre de tours de boucles, (b) à la complexité de chaque tour de boucle et (c) à la complexité des opérations en dehors de la boucle.

Question 4.a – Pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on note $\mathbf{res}_i$ la valeur de la variable $\mathbf{res}$ à la fin du tour de boucle d'indice i . L'invariant de boucle $(\mathcal{P}_i)$ est le suivant :

$$\mathbf{res}_i = \sum_{k=1}^i \sum_{\ell=k}^n k \times \ell.$$

Question 4.b – Pour $j \in \llbracket i; n \rrbracket$, on note $\mathbf{res}'_{i,j}$ la valeur de la variable $\mathbf{res}$ à la fin du tour de boucle d'indice j (i est l'entier fixé par l'énoncé). L'invariant de boucle $(\mathcal{Q}_{i,j})$ est le suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{res}'_{i,j} = \sum_{\ell=i}^j \ell & \text{pour } i = 1 \\ \mathbf{res}'_{i,j} = \mathbf{res}_{i-1} + \sum_{\ell=i}^j i \times \ell & \text{pour } i \in \llbracket 2; n \rrbracket \end{cases}$$

Question 4.c –

★ Soit $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ fixé. Montrons $(\mathcal{Q}_{1,j})$ par itération finie sur $j \in \llbracket i; n \rrbracket$:

Initialisation. Pour $j = i$:

→ Si $i = 1$ alors $\mathbf{res}'_{1,1} = 0 + 1 \cdot 1 = 1$ (lignes 4,5,6,7) et :

$$\sum_{\ell=1}^j \ell = 0 + 1 = 1$$

d'où $(\mathcal{Q}_{1,1})$.

→ Si $i \in \llbracket 2; n \rrbracket$, alors à la fin du tour de boucle « for i » précédent, la variable $\mathbf{res}$ contenait $\mathbf{res}_{i-1}$. Ainsi :

$$\mathbf{res}'_{i,j} = \mathbf{res}_{i-1} + i^2 = \mathbf{res}_{i-1} + \sum_{\ell=i}^i i \times \ell$$

d'où $(\mathcal{Q}_{i,i})$.

Hérédité. Soit $j \in \llbracket i+1; n \rrbracket$. On suppose $(\mathcal{Q}_{i,j-1})$ et on montre $(\mathcal{Q}_{i,j})$.

→ Si $i \in \llbracket 2; n \rrbracket$ alors $\mathbf{res}'_{i,j} = \mathbf{res}'_{i,j-1} + i \times j$ (ligne 7) donc par l'hypothèse de récurrence :

$$\mathbf{res}'_{i,j} = \mathbf{res}_{i-1} + \left(\sum_{\ell=i}^{j-1} i \times \ell \right) + i \times j = \mathbf{res}_{i-1} + \left(\sum_{\ell=i}^j i \times \ell \right).$$

D'où $(\mathcal{Q}_{i,j})$.

→ Si $i = 1$, la preuve est similaire.

Conclusion. $\mathcal{Q}_{i,j}$ est vraie pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et $j \in \llbracket i; n \rrbracket$.

★ Montrons $(\mathcal{P}_i)$ par itération finie sur $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

Initialisation. Initialisation : pour $i = 1$, on remarque que $\mathbf{res}_1 = \mathbf{res}'_{1,n}$. En utilisant $(\mathcal{Q}_{1,n})$:

$$\mathbf{res}_1 = \mathbf{res}'_{1,n} = \sum_{\ell=1}^n \ell = \sum_{k=1}^1 \sum_{\ell=k}^n k \times \ell$$

Hérédité. Soit $i \in \llbracket 2; n \rrbracket$. On suppose $(\mathcal{P}_{i-1})$ et on montre $(\mathcal{P}_i)$. On remarque que $\text{res}_i = \text{res}'_{i,n}$. En utilisant $(Q_{i,n})$:

$$\text{res}_i = \text{res}'_{i,n} = \text{res}_{i-1} + \sum_{\ell=i}^n i \times \ell$$

Par $(\mathcal{P}_{i-1})$:

$$\text{res}_i = \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{\ell=k}^n k \times \ell + \sum_{\ell=i}^n i \times \ell = \sum_{k=1}^i \sum_{\ell=k}^n k \times \ell$$

Conclusion. $\mathcal{P}_i$ est vraie pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

★ À la fin de la fonction, la variable **res** vaut :

$$\text{res}_n = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=k}^n k \times \ell$$

d'où la correction de la fonction.

Exercice 3. Moyenne et écart type

Question 1 – On numérote les tours de boucle de $k = 0$ à $k = \text{len}(d)-1$. On note c_k et s_k les valeurs des variables **c** et **s** à la fin du tour de boucle k . L'invariant suivant convient :

$$s_k = \sum_{i=0}^k d[c_i]$$

Question 2 – Le nombre de tours de boucle est en $\Theta(\text{len}(d))$ et toutes les opérations sont en temps constant. Donc la complexité est en $\Theta(\text{len}(d))$.

Question 3 – On numérote les tours de boucle de $k = 0$ à $k = \text{len}(d)-1$. On note m la moyenne des éléments de **d**. On note c_k et $d1_k$ les valeurs des variables **c** et **d1** à la fin du tour de boucle k .

L'invariant suivant convient :

$$d1_k = \{c_0 : (d[c_0] - m)^2, c_1 : (d[c_1] - m)^2, \dots, c_k : (d[c_k] - m)^2\}.$$

Question 4 – Il y a exactement $\text{len}(d)$ tours de boucle et 2 appels à la fonction **moy** dans chaque tour de boucle. Il y a aussi un appel ligne 12. Soit un total de $2 \times \text{len}(d) + 1$ appels à la fonction **moy**.

Soit $n = \text{len}(d)$ la taille de **d**. Chaque tour de boucle a une complexité en $\Theta(n)$ et il y a $\Theta(n)$ tours de boucle soit une complexité totale en :

$$\underbrace{\Theta(n)}_{(a)} \times \underbrace{\Theta(n)}_{(b)} + \underbrace{\Theta(n)}_{(c)} = \Theta(n^2) + \Theta(n) = \Theta(n^2)$$

où (a) correspond au nombre de tours de boucles, (b) à la complexité de chaque tour de boucle et (c) à la complexité des opérations en dehors de la boucle.

Question 5 – On peut calculer la valeur **moy(d)** au début de la fonction et la stocker dans une variable **m**, puis utiliser **m** au lieu des deux appels à **moy(d)** ligne 10.

Avec ces modifications, la complexité est en $\Theta(n)$.

Exercice 4. Calcul du PGCD

Question 1 – La quantité $v = \mathbf{b}$ est un variant de boucle donc le nombre de tours de boucle est fini et donc la fonction termine.

Question 2 – Étant donné deux entiers i, j , on note $D(i, j) \subset \mathbb{N}$ l'ensemble des diviseurs communs à i et j . $\text{PGCD}(i, j)$ est donc le maximum de $D(i, j)$.

Soient n, m les entiers en entrée de la fonction et $K \in \mathbb{N}^*$ le nombre de tours de boucle. On numérote les tours de boucle de $k = 0$ à $k = K - 1$. On note a_k et b_k les valeurs de $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ au début du tour de boucle d'indice k .

Soit $(\mathcal{P}_k)$ la propriété :

$$(\mathcal{P}_k) : D(n, m) = D(a_k, b_k)$$

Montrons que $(\mathcal{P}_k)$ est un invariant par récurrence sur $k \in \llbracket 0; K - 1 \rrbracket$:

★ Si $k = 0$ alors $a_k = n$ et $b_k = m$ d'où $(\mathcal{P}_0)$.

★ Soit $k \in \llbracket 1; K - 1 \rrbracket$. On suppose $(\mathcal{P}_{k-1})$ et on montre $(\mathcal{P}_k)$. Par la ligne 6, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que :

$$a_{k-1} = b_{k-1} \cdot q + b_k.$$

Par conséquent, si d divise b_{k-1} et b_k alors d divise a_{k-1} . On a donc $D(b_{k-1}, b_k) \subset D(a_{k-1}, b_{k-1})$.

Puisque $b_k = a_{k-1} - b_{k-1} \cdot q$, alors le même raisonnement donne $D(a_{k-1}, b_{k-1}) \subset D(b_{k-1}, b_k)$.

Comme $a_k = b_{k-1}$ (ligne 6), on conclut en utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$D(n, m) = D(a_{k-1}, b_{k-1}) = D(b_{k-1}, b_k) = D(a_k, b_k)$$

On a bien $(\mathcal{P}_k)$.

Notons a_K et b_K les valeurs de $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ à la fin de la fonction. En utilisant le même raisonnement que ci-dessus, on a :

$$D(n, m) = D(a_{K-1}, b_{K-1}) = D(a_K, b_K)$$

À la fin de la fonction, la condition de la boucle **while** n'est plus respectée, c'est à dire que $b_K = 0$. Le PGCD de n et m est le maximum de $D(n, m) = D(a_K, b_K) = D(a_K, 0)$.

Puisque tout entier divise 0, $D(a_k, 0)$ est l'ensemble des diviseurs de a_k . Le maximum de $D(a_k, 0)$ est donc a_k qui est bien la valeur renvoyée par la fonction.

Question 3.a – On sait déjà que $f_{k+2} = f_{k+1} + f_k$. Pour montrer que f_k est bien le reste, il faut montrer que $0 \leq f_k < f_{k+1}$. On a $f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$ et $k \geq 2$ donc $f_{k-1} \geq 1$ et $f_{k+1} > f_k$.

Question 3.b –

- Pour $k = 0$, $c(f_{k+1}, f_k) = c(1, 0) = 0$
- Pour $k = 1$, $c(f_{k+1}, f_k) = c(1, 1) = 1$
- Pour $k \geq 2$, par une récurrence immédiate : $c(f_{k+1}, f_k) = k$.

Question 3.c – D'après l'énoncé, on a $\phi^{k-1} \leq f_{k+1} \leq \phi^k$ donc pour $k \geq 2$:

$$\begin{aligned} c(f_{k+1}, f_k) &= k - 1 \geq \frac{\log f_{k+1}}{\log \phi} - 1 = \Omega(\log f_{k+1}). \\ c(f_{k+1}, f_k) &= k - 1 \leq \frac{\log f_{k+1}}{\log \phi} = \mathcal{O}(\log f_{k+1}). \end{aligned}$$

Donc $c(f_{k+1}, f_k) = \Theta(\log f_{k+1}) = \Theta(\log n)$.

Question 4.a – Soit $k \in \mathbb{N}$, on montre par récurrence sur k la propriété $(\mathcal{P}_k)$:

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2 : \left[(0 \leq m < n \text{ et } k = c(n, m)) \Rightarrow n \geq f_{k+2} \right].$$

- Pour $k = 0$, on doit montrer que $n \geq f_2 = 1$. Comme $0 \leq m < n$, on a bien $n \geq 1$.
- Pour $k = 1$, on doit montrer que $n \geq f_3 = 2$. Comme la fonction fait $k = 1$ tour de boucle, on a $m \neq 0$ donc $1 \leq m < n$ et donc $n \geq 2$.
- On suppose $(\mathcal{P}_k)$ et $(\mathcal{P}_{k+1})$ et on montre $(\mathcal{P}_{k+2})$.
Soit r le reste dans la division Euclidienne de n par m , alors $k + 2 = c(n, m) = c(m, r) + 1$. Donc $c(m, r) = k + 1$ et par $(\mathcal{P}_{k+1})$: $m \geq f_{k+3}$.
De même, soit r' le reste dans la division Euclidienne de m par r alors $k + 1 = c(m, r) = c(r, r') + 1$.
Donc $c(r, r') = k$ et par $(\mathcal{P}_k)$: $r \geq f_{k+2}$.
Finalement, si on note $q \in \mathbb{N}^*$ le quotient dans la division Euclidienne de n par m , on obtient :

$$n = mq + r \geq q + r \geq f_{k+3} + f_{k+2} = f_{k+4}.$$

Question 4.b – On a $n \geq f_{c(n,m)+2} \geq \phi^{c(n,m)}$. Donc $c(n, m) \leq \frac{\log n}{\log \phi} = \mathcal{O}(\log n)$. Le nombre de tours de boucle est un $\mathcal{O}(\log n)$ et toutes les opérations se font en temps constant donc la complexité est en $\mathcal{O}(\log n)$.

La complexité n'est pas un $\Theta(\log n)$ car lorsque m divise n , il n'y a qu'un tour de boucle.

Question 5 – Lorsque $0 \leq n \leq m$, on a trois cas :

- Si $n = m = 0$, on obtient 0 sans tour de boucle.
- Si $n = m \neq 0$, on obtient n avec un tour de boucle.
- Sinon, $n < m$ et les variables **a** et **b** sont échangées lors du premier tour de boucle. Donc $PGCD(n, m)$ fait un tour de plus que $PGCD(m, n)$. Finalement, la complexité est en $\mathcal{O}(\log(m))$ lorsque $n < m$.