Exercice 6. Moyenne des éléments d'une liste d'entiers

Question 1 –

```python
1 # On suppose que L est non vide
2 def moyenne(L):
3     """(L: list[int]) -> float"""
4     s = 0
5     for i in range(len(L)):
6         s += L[i]
7     return s/len(L)
```

Question 2 – La boucle `for` effectue `len(L)` tours et toutes les opérations sont élémentaires. Donc la fonction `moyenne` termine pour tout `L` non vide.

Question 3 – Les tours de boucle sont numérotés de $\mathtt{i} = 0$ à $\mathtt{i} = \mathtt{n} - 1$ où $\mathtt{n} = \mathtt{len(L)}$. Pour $\mathtt{i} \in [\![0 ; \mathtt{n} - 1]\!]$, on note $\mathtt{s_i}$ la valeur de la variable `s` à la fin du tour de boucle et $(\mathcal{P}_\mathtt{i})$ la propriété :

$$(\mathcal{P}_\mathtt{i}) : \mathtt{s_i} = \sum_{\mathtt{k}=0}^{\mathtt{i}} \mathtt{L[k]}$$

Montrons que $\mathcal{P}_\mathtt{i}$ est un invariant de boucle par récurrence sur $\mathtt{i} \in [\![0 ; \mathtt{n} - 1]\!]$:

<u>Initialisation.</u> On a $(\mathcal{P}_0)$ car $\mathtt{s_0} = \mathtt{L[0]}$.

<u>Hérédité.</u> Supposons $(\mathcal{P}_{\mathtt{i-1}})$ et montrons $(\mathcal{P}_\mathtt{i})$. D'après la ligne 6 :

$$\mathtt{s_i} = \mathtt{s_{i-1}} + \mathtt{L[i]} = \mathtt{L[i]} + \sum_{\mathtt{k}=0}^{\mathtt{i-1}} \mathtt{L[k]} = \sum_{\mathtt{k}=0}^{\mathtt{i}} \mathtt{L[k]}$$

D'où $(\mathcal{P}_\mathtt{i})$

<u>Conclusion.</u> D'après $(\mathcal{P}_n)$, en sortie de boucle, la variable `s` vaut la somme des éléments de `L`. La fonction `moyenne` renvoie `s/len(L)` (ligne 7) et est donc correcte.

Exercice 7. Calcul de la factorielle

Question 1 – La ligne 4 doit être `while i <= n`.

Question 2 – On utilise un variant de boucle. La quantité $\mathtt{v} = \mathtt{n} - \mathtt{i}$ est un variant de boucle, en effet :

- Au début de chaque tour de boucle, $\mathtt{v} \in \mathbb{N}$.
- `v` décroît à chaque passage dans la boucle `while` à cause de la ligne 6.

Ainsi, le nombre de tours dans la boucle `while` est fini. De plus, toutes les opérations sont des opérations élémentaires donc la fonction `fact` termine pour tout $\mathtt{n} \geqslant 0$.

Question 3 – Numérotons les tours de boucle de $\mathtt{k} = 2$ à $\mathtt{k} = \mathtt{n}$. On remarque que la variable `i` vaut `k` au début du tour et `k+1` à la fin du tour. Pour tout $\mathtt{k} \in [\![2 ; \mathtt{n}]\!]$, soit $\mathtt{res_k}$ la valeur de la variable `res` à la fin du tour de boucle et $(\mathcal{P}_\mathtt{k})$ la proposition :

$$\mathtt{res_k} = \mathtt{k!}$$

Montrons que $(\mathcal{P}_\mathtt{k})$ est un invariant de boucle par récurrence sur $\mathtt{k} \in [\![2, \mathtt{n}]\!]$:

Initialisation. On a $(\mathcal{P}_2)$ car $\texttt{res}_2 = 1 \times 2 = 2!$.

Hérédité. Pour $\texttt{k} \in [\![3, \texttt{n}]\!]$, supposons $(\mathcal{P}_{\texttt{k-1}})$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{\texttt{k}})$. D'après la ligne 6 :

$$\texttt{res}_{\texttt{k}} = \texttt{res}_{\texttt{k-1}} \times \texttt{k} = (\texttt{k} - 1)! \times \texttt{k} = \texttt{k}!$$

Donc $(\mathcal{P}_{\texttt{k}})$ est vraie.

Conclusion. On en déduit la correction :

- → Si `n` vaut `0` ou `1`, alors la fonction renvoie $1 = 0! = 1!$.
- → D'après $(\mathcal{P}_{\texttt{n}})$: à la fin du dernier tour de boucle, la variable **res** vaut $\texttt{res}_{\texttt{n}} = \texttt{n}!$ qui est la valeur renvoyée par la fonction.