

Exercice 6. Moyenne des éléments d'une liste d'entiers

Question 1 –

```

1 | # On suppose que L est non vide
2 | def moyenne(L):
3 |     """(L: list[int]) -> float"""
4 |     s = 0
5 |     for i in range(len(L)):
6 |         s += L[i]
7 |     return s/len(L)

```

Question 2 – La boucle `for` effectue `len(L)` tours et toutes les opérations sont élémentaires. Donc la fonction `moyenne` termine pour tout `L` non vide.

Question 3 – Les tours de boucle sont numérotés de $i = 0$ à $i = n - 1$ où $n = \text{len}(L)$. Pour $i \in \llbracket 0; n - 1 \rrbracket$, on note s_i la valeur de la variable `s` à la fin du tour de boucle et (\mathcal{P}_i) la propriété :

$$(\mathcal{P}_i) : s_i = \sum_{k=0}^i L[k]$$

Montrons que \mathcal{P}_i est un invariant de boucle par récurrence sur $i \in \llbracket 0; n - 1 \rrbracket$:

Initialisation. On a (\mathcal{P}_0) car $s_0 = L[0]$.

Hérédité. Supposons (\mathcal{P}_{i-1}) et montrons (\mathcal{P}_i) . D'après la ligne 6 :

$$s_i = s_{i-1} + L[i] = L[i] + \sum_{k=0}^{i-1} L[k] = \sum_{k=0}^i L[k]$$

D'où (\mathcal{P}_i)

Conclusion. D'après (\mathcal{P}_n) , en sortie de boucle, la variable `s` vaut la somme des éléments de `L`. La fonction `moyenne` renvoie `s/len(L)` (ligne 7) et est donc correcte.

Exercice 7. Calcul de la factorielle

Question 1 – La ligne 4 doit être `while i <= n`.

Question 2 – On utilise un variant de boucle. La quantité $v = n - i$ est un variant de boucle, en effet :

- Au début de chaque tour de boucle, $v \in \mathbb{N}$.
- v décroît à chaque passage dans la boucle `while` à cause de la ligne 6.

Ainsi, le nombre de tours dans la boucle `while` est fini. De plus, toutes les opérations sont des opérations élémentaires donc la fonction `fact` termine pour tout $n \geq 0$.

Question 3 – On exhibe un invariant de boucle. Les tours de boucle sont numérotés de $i = 2$ à $i = n$. Pour $i \in \llbracket 2; n \rrbracket$, on note `resi` la valeur de la variable `res` au début du tour de boucle et (\mathcal{P}_i) la proposition :

$$\text{res}_i = (i - 1)!$$

Montrons que (\mathcal{P}_i) est un invariant de boucle par récurrence sur $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$:

Initialisation. On a (\mathcal{P}_2) car $\text{res}_2 = 1 = 1!$.

Hérédité. Pour $i \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$, supposons (\mathcal{P}_i) vraie et montrons (\mathcal{P}_{i+1}) . D'après la ligne 6 :

$$\text{res}_{i+1} = \text{res}_i \times i = (i-1)! \times i = i!$$

Donc (\mathcal{P}_{i+1}) est vraie.

Conclusion. On en déduit la correction :

→ Si n vaut 0 ou 1, alors la fonction renvoie $1 = 0! = 1!$.

→ D'après (\mathcal{P}_n) : au début du dernier tour de boucle $\text{res}_n = (n-1)!$. Ainsi, à la fin du dernier tour de boucle, $\text{res} = n \times \text{res}_n = n!$ qui est la valeur renvoyée par la fonction.