Exercice 5.

Question 1 – Le fonction `somLL` renvoie la somme des entiers présents dans `L`, c'est à dire :

$$\sum_{\mathtt{i=0}}^{\mathtt{len(L)-1}} \left[\sum_{\mathtt{j=0}}^{\mathtt{len(L[i])-1}} \mathtt{L[i][j]} \right]$$

Question 2 – La boucle « `for i` » fait `len(L)` tours. De plus, pour chaque $\mathtt{i} \in [\![\mathtt{0}, \mathtt{len(L) - 1}]\!]$, la boucle « `for j` » fait `len(L[i]) - 1` tours. Finalement, le nombre de tours de boucle est fini et toutes les instructions sont élémentaires donc la fonction termine pour toute entrée `L`.

Question 3.a – Pour $\mathtt{i} \in [\![\mathtt{0}; \mathtt{len(L) - 1}]\!]$, l'invariant suivant convient :

$$(\mathcal{P}_{\mathtt{i}}) \ : \ \mathtt{s_i} = \sum_{\mathtt{k=0}}^{\mathtt{i}} \left[\sum_{\ell=\mathtt{0}}^{\mathtt{len(L[k])-1}} \mathtt{L[k]}[\ell] \right].$$

Question 3.b – Pour $\mathtt{i} \in [\![\mathtt{0}; \mathtt{len(L) - 1}]\!]$ et $\mathtt{j} \in [\![\mathtt{0}; \mathtt{len(L[i]) - 1}]\!]$, l'invariant suivant convient :

$$(\mathcal{Q}_{\mathtt{i,j}}) \ : \begin{cases} \mathtt{s}'_{\mathtt{i,j}} = \displaystyle\sum_{\ell=\mathtt{0}}^{\mathtt{j}} \mathtt{L[i]}[\ell] & \text{si } \mathtt{i = 0} \\ \mathtt{s}'_{\mathtt{i,j}} = \mathtt{s_{i-1}} + \displaystyle\sum_{\ell=\mathtt{0}}^{\mathtt{j}} \mathtt{L[i]}[\ell] & \text{si } \mathtt{i} \in [\![\mathtt{1}; \mathtt{len(L) - 1}]\!] \end{cases}$$

Question 3.c –

⋆ Soit $\mathtt{i} \in [\![\mathtt{0}; \mathtt{len(L) - 1}]\!]$ fixé. Montrons $(\mathcal{Q}_{\mathtt{1,j}})$ par itération finie sur $\mathtt{j} \in [\![\mathtt{0}; \mathtt{len(L[j]) - 1}]\!]$:

→ Initialisation : pour `j = 0` :

- Si `i = 0` alors $\mathtt{s}'_{\mathtt{0,0}} = \mathtt{0} + \mathtt{L[0][0]}$ (lignes 4,5,6) et :

$$\sum_{\ell=\mathtt{0}}^{\mathtt{j}} \mathtt{L[i]}[\ell] = \mathtt{L[0][0]}$$

  d'où $(\mathcal{Q}_{\mathtt{0,0}})$.

- Si $\mathtt{i} \in [\![\mathtt{0}; \mathtt{len(L[i]) - 1}]\!]$, alors à la fin du tour de boucle « `for i` » précédent, la variable `s` contenait $\mathtt{s_{i-1}}$. Ainsi :

$$\mathtt{s}'_{\mathtt{i,j}} = \mathtt{s_{i-1}} + \mathtt{L[i][0]} = \mathtt{s_{i-1}} + \sum_{\ell=\mathtt{0}}^{\mathtt{j}} \mathtt{L[i]}[\ell]$$

  d'où $(\mathcal{Q}_{\mathtt{i,0}})$.

→ Hérédité : soit $\mathtt{j} \in [\![\mathtt{1}; \mathtt{len(L[i]) - 1}]\!]$. On suppose $(\mathcal{Q}_{\mathtt{i,j-1}})$ et on montre $(\mathcal{Q}_{\mathtt{i,j}})$.

- Si $\mathtt{i} \in [\![\mathtt{1}; \mathtt{len(L) - 1}]\!]$ alors $\mathtt{s}'_{\mathtt{i,j}} = \mathtt{s}'_{\mathtt{i,j-1}} + \mathtt{L[i][j]}$ (ligne 6) donc par l'hypothèse de récurrence :

$$\mathtt{s}'_{\mathtt{i,j}} = \mathtt{s_{i-1}} + \left(\sum_{\ell=\mathtt{0}}^{\mathtt{j-1}} \mathtt{L[i]}[\ell] \right) + \mathtt{L[i][j]} = \mathtt{s_{i-1}} + \left(\sum_{\ell=\mathtt{0}}^{\mathtt{j}} \mathtt{L[i]}[\ell] \right)$$

  D'où $(\mathcal{Q}_{\mathtt{i,j}})$.

- Si `i = 0`, la preuve est similaire.

En conclusion, $\mathcal{Q}_{\mathtt{i,j}}$ est vraie pour tout $\mathtt{i} \in [\![\mathtt{0}; \mathtt{len(L) - 1}]\!]$ et $\mathtt{j} \in [\![\mathtt{0}; \mathtt{len(L[i]) - 1}]\!]$.

⋆ Montrons $(\mathcal{P}_{\texttt{i}})$ par itération finie sur $\texttt{i} \in [\![0;\texttt{len(L) - 1}]\!]$.

→ Initialisation : pour $\texttt{i = 0}$, on remarque que $\texttt{s}_0 = \texttt{s}'_{\texttt{0,len(L[0])-1}}$. En utilisant $(\mathcal{Q}_{\texttt{0,len(L[0])-1}})$:

$$\texttt{s}_0 = \texttt{s}'_{\texttt{0,len(L[0])-1}} = \sum_{\ell=0}^{\texttt{len(L[0])-1}} \texttt{L[0][}\ell\texttt{]} = \sum_{\texttt{k}=0}^{0} \left[\sum_{\ell=0}^{\texttt{len(L[k])-1}} \texttt{L[k][}\ell\texttt{]} \right]$$

→ Hérédité : soit $\texttt{i} \in [\![1;\texttt{len(L) - 1}]\!]$. On suppose $(\mathcal{P}_{\texttt{i-1}})$ et on montre $(\mathcal{P}_{\texttt{i}})$. On remarque que $\texttt{s}_{\texttt{i}} = \texttt{s}'_{\texttt{i,len(L[i])-1}}$. En utilisant $(\mathcal{Q}_{\texttt{i,len(L[i])-1}})$:

$$\texttt{s}_{\texttt{i}} = \texttt{s}'_{\texttt{i,len(L[i])-1}} = \texttt{s}_{\texttt{i-1}} + \sum_{\ell=0}^{\texttt{len(L[i])-1}} \texttt{L[i][}\ell\texttt{]}$$

Par $(\mathcal{P}_{\texttt{i-1}})$:

$$\texttt{s}_{\texttt{i}} = \sum_{\texttt{k}=0}^{\texttt{i-1}} \left[\sum_{\ell=0}^{\texttt{len(L[k])-1}} \texttt{L[k][}\ell\texttt{]} \right] + \sum_{\ell=0}^{\texttt{len(L[i])-1}} \texttt{L[i][}\ell\texttt{]} = \sum_{\texttt{k}=0}^{\texttt{i}} \left[\sum_{\ell=0}^{\texttt{len(L[k])-1}} \texttt{L[k][}\ell\texttt{]} \right]$$

En conclusion, $\mathcal{P}_{\texttt{i}}$ est vraie pour tout $\texttt{i} \in [\![1;\texttt{n}]\!]$.

⋆ À la fin de la fonction, la variable `s` vaut :

$$\texttt{s}_{\texttt{len(L)-1}} = \sum_{\texttt{k}=0}^{\texttt{len(L)-1}} \left[\sum_{\ell=0}^{\texttt{len(L[k])-1}} \texttt{L[k][}\ell\texttt{]} \right]$$

d'où la correction de la fonction.

Exercice 6. Exponentiation rapide (facultatif)

Question 1 – La quantité $v = \texttt{m}$ est un variant de boucle donc le nombre de tours de boucle est fini. De plus, toutes les opérations sont élémentaires donc la fonction termine.

Question 2 – On montre $(\mathcal{P}_k)$ par récurrence :

- Pour $k = 0$, on a :

$$res_0 = 1, \qquad y_0 = x, \qquad m_0 = n.$$

  Donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.

- On suppose $(\mathcal{P}_k)$ et on montre $(\mathcal{P}_{k+1})$.
  - Si m_k est pair :

$$\begin{aligned} res_{k+1} \times y_{k+1}^{m_{k+1}} &= res_k \times (y_k^2)^{m_k/2} && \text{Par les lignes 8 et 9} \\ &= res_k \times y_k^{m_k} \\ &= x^n && \text{Par } (\mathcal{P}_k) \end{aligned}$$

  - Sinon, m_k est impair et :

$$\begin{aligned} res_{k+1} \times y_{k+1}^{m_{k+1}} &= y_k \times res_k \times (y_k^2)^{(m_k-1)/2} && \text{Par les lignes 7, 8 et 9} \\ &= res_k \times y_k^{m_k} \\ &= x^n && \text{Par } (\mathcal{P}_k) \end{aligned}$$

Donc $(\mathcal{P}_k)$ est vrai pour tout $k \in [\![0, K]\!]$. Pour $k = K$, $(\mathcal{P}_K)$ s'écrit $res_K \times y_K^{m_K} = x^n$. Or, à la fin de la fonction, la condition de la boucle `while` n'est plus vérifiée, donc $m_K = 0$ et on obtient :

$$res_K = x^n$$

Donc la fonction est correcte.

Question 3 – On montre d'abord l'inégalité de gauche :

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^i} = \frac{1 - 1/2^k}{2(1-1/2)} = 1 - 1/2^k \leqslant 1.$$

On montre maintenant les deux autres inégalité par récurrence sur $k \in [\![0, K-1]\!]$:

- Pour $k = 0$, on doit montrer que : $n \leqslant m_0 \leqslant n$ ce qui est vrai.
- On suppose la propriété vraie au rang k et la montre au rang $k+1$. On a :

$$\begin{aligned} m_{k+1} = \left\lfloor \frac{m_k}{2} \right\rfloor \geqslant \frac{m_k - 1}{2} \geqslant \frac{\frac{n}{2^k} - \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^i}}{2} - \frac{1}{2} & \qquad \text{D'après l'hypothèse de récurrence.} \\ = \frac{n}{2^{k+1}} - \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{2^i} & \end{aligned}$$

De même :

$$m_{k+1} = \left\lfloor \frac{m_k}{2} \right\rfloor \leqslant \frac{m_k}{2} \leqslant \frac{n}{2^{k+1}} \qquad \text{D'après l'hypothèse de récurrence.}$$

Question 4 – Au début du dernier tour de boucle, on a $m_{K-1} = 1$. Par la question 3 :

$$\frac{n}{2^{K-1}} - 1 \leqslant 1 \leqslant \frac{n}{2^{K-1}}.$$

Ainsi, $n \geqslant 2^{K-1}$ et $n \leqslant 2^K$. Donc $\log_2 n \geqslant K - 1$ et $\log_2 n \leqslant K$. Le nombre de tours de boucle est un $\Theta(\log n)$, toutes les instructions sont élémentaires et s'exécutent en temps constant donc la complexité de la fonction est en $\Theta(\log n)$.