Exercice 1. Recherche du minimum dans une liste d'entiers

Question 1 – Il faut que la liste `L` soit non vide, sinon à la fin de la fonction `imin` vaut `0` et la ligne 7 déclenche une erreur. Lorsque `L` est non vide, la fonction `mini` renvoie le plus petit élément de `L`.

Question 2 –

⋆ Le pire cas correspond au cas où la liste en entrée est strictement décroissante (la ligne 6 est alors exécutée à chaque tour de boucle). Si on pose `n = len(L)`, on obtient une complexité en :

$$\underbrace{\Theta(n)}_{(a)} \times \underbrace{\Theta(1)}_{(b)} + \underbrace{\Theta(1)}_{(c)} = \Theta(n) + \Theta(1) = \Theta(n)$$

où (a) correspond au nombre de tours de boucles, (b) à la complexité de chaque tour de boucle et (c) à la complexité des opérations en dehors de la boucle.

⋆ Le meilleur cas correspond au cas où la liste en entrée est croissante (la ligne 6 n'est alors jamais exécutée). La complexité reste la même que dans le pire cas en $\Theta(n)$.

Question 3 – Les tours de boucles sont numérotés de `i = 1` à `i = n`. L'invariant de boucle est :

$$(\mathcal{P}_{\texttt{i}}) : \text{à la fin du tour de boucle } \texttt{i}, \texttt{L[imin]} \text{ est le minimum de } \Big\{\texttt{L[k]} : \texttt{0 <= k <= i}\Big\}$$

Exercice 2. Somme des produits

Question 1 – Elle renvoie $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} i \times j$.

Question 2 – La boucle « `for i` » fait `n` tours. De plus, pour chaque $\texttt{i} \in [\![\texttt{1}, \texttt{n}]\!]$, la boucle « `for j` » fait `n + 1 - i` tours. Finalement, le nombre de tours de boucle est fini et toutes les instructions sont élémentaires donc la fonction termine pour tout `n`.

Question 3 – Le nombre de passages sur la ligne 7 est :

$$c_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} 1 = \sum_{i=1}^{n}\Big(n+1-i\Big)$$

On peut calculer le nombre exact de tours de boucle :

$$c_n = \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}.$$

La complexité est donc :

$$\underbrace{\Theta(n^2)}_{(a)} \times \underbrace{\Theta(1)}_{(b)} + \underbrace{\Theta(1)}_{(c)} = \Theta(n^2) + \Theta(1) = \Theta(n^2)$$

où (a) correspond au nombre de tours de boucles, (b) à la complexité de chaque tour de boucle et (c) à la complexité des opérations en dehors de la boucle.

Question 4.a – Pour $\mathtt{i} \in [\![1;\mathtt{n}]\!]$, on note $\mathtt{res_i}$ la valeur de la variable `res` à la fin du tour de boucle d'indice `i`. L'invariant de boucle $(\mathcal{P}_\mathtt{i})$ est le suivant :

$$\mathtt{res_i} = \sum_{\mathtt{k}=1}^{\mathtt{i}} \sum_{\ell=\mathtt{k}}^{\mathtt{n}} \mathtt{k} \times \ell.$$

Question 4.b – Pour $\mathtt{j} \in [\![\mathtt{i};\mathtt{n}]\!]$, on note $\mathtt{res}'_{\mathtt{i},\mathtt{j}}$ la valeur de la variable `res` à la fin du tour de boucle d'indice `j` (`i` est l'entier fixé par l'énoncé). L'invariant de boucle $(\mathcal{Q}_{\mathtt{i},\mathtt{j}})$ est le suivant :

$$\begin{cases} \mathtt{res}'_{\mathtt{i},\mathtt{j}} = \displaystyle\sum_{\ell=\mathtt{i}}^{\mathtt{j}} \ell & \text{pour } \mathtt{i} = 1 \\ \mathtt{res}'_{\mathtt{i},\mathtt{j}} = \mathtt{res_{i-1}} + \displaystyle\sum_{\ell=\mathtt{i}}^{\mathtt{j}} \mathtt{i} \times \ell & \text{pour } \mathtt{i} \in [\![2;\mathtt{n}]\!] \end{cases}$$

Question 4.c –

⋆ Soit $\mathtt{i} \in [\![1;\mathtt{n}]\!]$ fixé. Montrons $(\mathcal{Q}_{1,\mathtt{j}})$ par itération finie sur $\mathtt{j} \in [\![\mathtt{i};\mathtt{n}]\!]$:

→ Initialisation : Pour $\mathtt{j} = \mathtt{i}$:

- Si $\mathtt{i} = 1$ alors $\mathtt{res}'_{1,1} = 0 + 1.1 = 1$ (lignes 4,5,6,7) et :

$$\sum_{\ell=\mathtt{i}}^{\mathtt{j}} \ell = 0 + 1 = 1$$

d'où $(\mathcal{Q}_{1,1})$.

- Si $\mathtt{i} \in [\![2;\mathtt{n}]\!]$, alors à la fin du tour de boucle « `for i` » précédent, la variable `res` contenait $\mathtt{res_{i-1}}$. Ainsi :

$$\mathtt{res}'_{\mathtt{i},\mathtt{j}} = \mathtt{res_{i-1}} + \mathtt{i}^2 = \mathtt{res_{i-1}} + \sum_{\ell=\mathtt{i}}^{\mathtt{i}} \mathtt{i} \times \ell$$

d'où $(\mathcal{Q}_{\mathtt{i},\mathtt{i}})$.

→ Hérédité : Soit $\mathtt{j} \in [\![\mathtt{i}+1;\mathtt{n}]\!]$. On suppose $(\mathcal{Q}_{\mathtt{i},\mathtt{j-1}})$ et on montre $(\mathcal{Q}_{\mathtt{i},\mathtt{j}})$.

- Si $\mathtt{i} \in [\![2;\mathtt{n}]\!]$ alors $\mathtt{res}'_{\mathtt{i},\mathtt{j}} = \mathtt{res}'_{\mathtt{i},\mathtt{j-1}} + \mathtt{i}.\mathtt{j}$ (ligne 7) donc par l'hypothèse de récurrence :

$$\mathtt{res}'_{\mathtt{i},\mathtt{j}} = \mathtt{res_{i-1}} + \left(\sum_{\ell=\mathtt{i}}^{\mathtt{j-1}} \mathtt{i} \times \ell\right) + \mathtt{i}.\mathtt{j} = \mathtt{res_{i-1}} + \left(\sum_{\ell=\mathtt{i}}^{\mathtt{j}} \mathtt{i} \times \ell\right).$$

D'où $(\mathcal{Q}_{\mathtt{i},\mathtt{j}})$.

- Si $\mathtt{i} = 1$, la preuve est similaire.

En conclusion, $\mathcal{Q}_{\mathtt{i},\mathtt{j}}$ est vraie pour tout $\mathtt{i} \in [\![1;\mathtt{n}]\!]$ et $\mathtt{j} \in [\![\mathtt{i};\mathtt{n}]\!]$.

⋆ Montrons $(\mathcal{P}_\mathtt{i})$ par itération finie sur $\mathtt{i} \in [\![1;\mathtt{n}]\!]$.

→ Initialisation : pour $\mathtt{i} = 1$, on remarque que $\mathtt{res_1} = \mathtt{res}'_{\mathtt{i},\mathtt{n}}$. En utilisant $(\mathcal{Q}_{\mathtt{i},\mathtt{n}})$:

$$\mathtt{res_1} = \mathtt{res}'_{\mathtt{i},\mathtt{n}} = \sum_{\ell=1}^{\mathtt{n}} \ell = \sum_{\mathtt{k}=1}^{1} \sum_{\ell=\mathtt{k}}^{\mathtt{n}} \mathtt{k} \times \ell$$

→ Hérédité : soit $\mathtt{i} \in [\![2;\mathtt{n}]\!]$. On suppose $(\mathcal{P}_{\mathtt{i-1}})$ et on montre $(\mathcal{P}_\mathtt{i})$. On remarque que $\mathtt{res_i} = \mathtt{res}'_{\mathtt{i},\mathtt{n}}$. En utilisant $(\mathcal{Q}_{\mathtt{i},\mathtt{n}})$:

$$\mathtt{res_i} = \mathtt{res}'_{\mathtt{i},\mathtt{n}} = \mathtt{res_{i-1}} + \sum_{\ell=\mathtt{i}}^{\mathtt{n}} \mathtt{i} \times \ell$$

Par $(\mathcal{P}_{\mathtt{i-1}})$:

$$\mathtt{res_i} = \sum_{\mathtt{k=1}}^{\mathtt{i-1}} \sum_{\ell=\mathtt{k}}^{\mathtt{n}} \mathtt{k} \times \ell + \sum_{\ell=\mathtt{i}}^{\mathtt{n}} \mathtt{i} \times \ell = \sum_{\mathtt{k=1}}^{\mathtt{i}} \sum_{\ell=\mathtt{k}}^{\mathtt{n}} \mathtt{k} \times \ell$$

En conclusion, $\mathcal{P}_{\mathtt{i}}$ est vraie pour tout $\mathtt{i} \in [\![1\,;\,\mathtt{n}]\!]$.

⋆ À la fin de la fonction, la variable `res` vaut :

$$\mathtt{res_n} = \sum_{\mathtt{k=1}}^{\mathtt{n}} \sum_{\ell=\mathtt{k}}^{\mathtt{n}} \mathtt{k} \times \ell$$

d'où la correction de la fonction.

Exercice 3. Moyenne et écart type

Question 1 – On numérote les tours de boucle de `k = 0` à `k = len(d)-1`. On note $\mathtt{c_k}$ et $\mathtt{s_k}$ les valeurs des variables `c` et `s` à la fin du tour de boucle `k`. L'invariant suivant convient :

$$\mathtt{s_k} = \sum_{\mathtt{i=0}}^{\mathtt{k}} \mathtt{d[c_i]}$$

Question 2 – Le nombre de tours de boucle est en $\Theta(\mathtt{len(d)})$ et toutes les opérations sont en temps constant. Donc la complexité est en $\Theta(\mathtt{len(d)})$.

Question 3 – On numérote les tours de boucle de `k = 0` à `k = len(d)-1`. On note `m` la moyenne des éléments de `d`. On note $\mathtt{c_k}$ et $\mathtt{d1_k}$ les valeurs des variables `c` et `d1` à la fin du tour de boucle `k`.

L'invariant suivant convient :

$$\mathtt{d1_k} = \{\mathtt{c_0} : (\mathtt{d[c_0]} - \mathtt{m})^2, \mathtt{c_1} : (\mathtt{d[c_1]} - \mathtt{m})^2, \dots, \mathtt{c_k} : (\mathtt{d[c_k]} - \mathtt{m})^2\}.$$

Question 4 – Il y a exactement `len(d)` tours de boucle et 2 appels à la fonction `moy` dans chaque tour de boucle. Il y a aussi un appel ligne 12. Soit un total de $2 \times \mathtt{len(d)} + 1$ appels à la fonction `moy`.

Soit `n = len(d)` la taille de `d`. Chaque tour de boucle a une complexité en $\Theta(\mathtt{n})$ et il y a $\Theta(\mathtt{n})$ tours de boucle soit une complexité totale en :

$$\underbrace{\Theta(n)}_{(a)} \times \underbrace{\Theta(n)}_{(b)} + \underbrace{\Theta(n)}_{(c)} = \Theta(n^2) + \Theta(n) = \Theta(n^2)$$

où (a) correspond au nombre de tours de boucles, (b) à la complexité de chaque tour de boucle et (c) à la complexité des opérations en dehors de la boucle.

Question 5 – On peut calculer la valeur `moy(d)` au début de la fonction et la stocker dans une variable `m`, puis utiliser `m` au lieu des deux appels à `moy(d)` ligne 10.

Avec ces modifications, la complexité est en $\Theta(n)$.

Exercice 4. Calcul du PGCD

Question 1 – La quantité $v = \mathtt{b}$ est un variant de boucle donc le nombre de tours de boucle est fini et donc la fonction termine.

Question 2 – Étant donné deux entiers i, j, on note $D(i, j) \subset \mathbb{N}$ l'ensemble des diviseurs communs à i et j. $PGCD(i, j)$ est donc le maximum de $D(i, j)$.

Soient n, m les entiers en entrée de la fonction et $K \in \mathbb{N}^*$ le nombre de tours de boucle. On numérote les tours de boucle de $k = 0$ à $k = K - 1$. On note a_k et b_k les valeurs de `a` et `b` au début du tour de boucle d'indice k.

Soit $(\mathcal{P}_k)$ la propriété :

$$(\mathcal{P}_k) : D(n, m) = D(a_k, b_k)$$

Montrons que $(\mathcal{P}_k)$ est un invariant par récurrence sur $k \in [\![0; K - 1]\!]$:

⋆ Si $k = 0$ alors $a_k = n$ et $b_k = m$ d'où $(\mathcal{P}_0)$.

⋆ Soit $k \in [\![1; K - 1]\!]$. On suppose $(\mathcal{P}_{k-1})$ et on montre $(\mathcal{P}_k)$. Par la ligne 6, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que :

$$a_{k-1} = b_{k-1}.q + b_k.$$

Par conséquent, si d divise b_{k-1} et b_k alors d divise a_{k-1}. On a donc $D(b_{k-1}, b_k) \subset D(a_{k-1}, b_{k-1})$.

Puisque $b_k = a_{k-1} - b_{k-1}.q$, alors le même raisonnement donne $D(a_{k-1}, b_{k-1}) \subset D(b_{k-1}, b_k)$.

Comme $a_k = b_{k-1}$ (ligne 6), on conclut en utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$D(n, m) = D(a_{k-1}, b_{k-1}) = D(b_{k-1}, b_k) = D(a_k, b_k)$$

On a bien $(\mathcal{P}_k)$.

Notons a_K et b_K les valeurs de `a` et `b` à la fin de la fonction. En utilisant le même raisonnement que ci-dessus, on a :

$$D(n, m) = D(a_{K-1}, b_{K-1}) = D(a_K, b_K)$$

À la fin de la fonction, la condition de la boucle `while` n'est plus respectée, c'est à dire que $b_K = 0$. Le PGCD de n et m est le maximum de $D(n, m) = D(a_K, b_K) = D(a_K, 0)$.

Puisque tout entier divise 0, $D(a_k, 0)$ est l'ensemble des diviseurs de a_k. Le maximum de $D(a_k, 0)$ est donc a_k qui est bien la valeur renvoyée par la fonction.

Question 3.a – On sait déjà que $f_{k+2} = f_{k+1} + f_k$. Pour montrer que f_k est bien le reste, il faut montrer que $0 \leqslant f_k < f_{k+1}$. On a $f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$ et $k \geqslant 2$ donc $f_{k-1} \geqslant 1$ et $f_{k+1} > f_k$.

Question 3.b –

- Pour $k = 0$, $c(f_{k+1}, f_k) = c(1, 0) = 0$
- Pour $k = 1$, $c(f_{k+1}, f_k) = c(1, 1) = 1$
- Pour $k \geqslant 2$, par une récurrence immédiate : $c(f_{k+1}, f_k) = k$.

Question 3.c – D'après l'énoncé, on a $\phi^{k-1} \leqslant f_{k+1} \leqslant \phi^k$ donc pour $k \geqslant 2$:

$$c(f_{k+1}, f_k) = k - 1 \geqslant \frac{\log f_{k+1}}{\log \phi} - 1 = \Omega(\log f_{k+1}).$$
$$c(f_{k+1}, f_k) = k - 1 \leqslant \frac{\log f_{k+1}}{\log \phi} = \mathcal{O}(\log f_{k+1}).$$

Donc $c(f_{k+1}, f_k) = \Theta(\log f_{k+1}) = \Theta(\log n)$.

Question 4.a – Soit $k \in \mathbb{N}$, on montre par récurrence sur k la propriété $(\mathcal{P}_k)$:

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2 : \Big[\Big(0 \leqslant m < n \text{ et } k = c(n,m)\Big) \Rightarrow n \geqslant f_{k+2}\Big].$$

- Pour $k = 0$, on doit montrer que $n \geqslant f_2 = 1$. Comme $0 \leqslant m < n$, on a bien $n \geqslant 1$.
- Pour $k = 1$, on doit montrer que $n \geqslant f_3 = 2$. Comme la fonction fait $k = 1$ tour de boucle, on a $m \neq 0$ donc $1 \leqslant m < n$ et donc $n \geqslant 2$.
- On suppose $(\mathcal{P}_k)$ et $(\mathcal{P}_{k+1})$ et on montre $(\mathcal{P}_{k+2})$.
  Soit r le reste dans la division Euclidienne de n par m, alors $k+2 = c(n,m) = c(m,r)+1$. Donc $c(m,r) = k+1$ et par $(\mathcal{P}_{k+1})$: $m \geqslant f_{k+3}$.
  De même, soit r' le reste dans la division Euclidienne de m par r alors $k+1 = c(m,r) = c(r,r')+1$. Donc $c(r,r') = k$ et par $(\mathcal{P}_k)$: $r \geqslant f_{k+2}$.
  Finalement, si on note $q \in \mathbb{N}^*$ le quotient dans la division Euclidienne de n par m, on obtient :

$$n = mq + r \geqslant q + r \geqslant f_{k+3} + f_{k+2} = f_{k+4}.$$

Question 4.b – On a $n \geqslant f_{c(n,m)+2} \geqslant \phi^{c(n,m)}$. Donc $c(n,m) \leqslant \frac{\log n}{\log \phi} = \mathcal{O}(\log n)$. Le nombre de tours de boucle est un $\mathcal{O}(\log n)$ et toutes les opérations se font en temps constant donc la complexité est en $\mathcal{O}(\log n)$.

La complexité n'est pas un $\Theta(\log n)$ car lorsque m divise n, il n'y a qu'un tour de boucle.

Question 5 – Lorsque $0 \leqslant n \leqslant m$, on a trois cas :

- Si $n = m = 0$, on obtient 0 sans tour de boucle.
- Si $n = m \neq 0$, on obtient n avec un tour de boucle.
- Sinon, $n < m$ et les variables `a` et `b` sont échangées lors du premier tour de boucle. Donc $PGCD(n,m)$ fait un tour de plus que $PGCD(m,n)$. Finalement, la complexité est en $\mathcal{O}(\log(m))$ lorsque $n < m$.