Exercice 4. Plouf-plouf

Question 2.a – Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que le capitaine sera l'enfant numéro 0 :

- Si $k = 0$ alors $n = 1$ et la propriété est vraie.
- Étant donné $k \in \mathbb{N}$, on suppose la propriété vraie au rang k et on la montre au rang $k + 1$. Lorsque $m = 2$ et $n = 2^{k+1}$, les enfants éliminés lors du premier tour sont ceux dont les numéros sont $1, 3, 5, \dots, 2^{k+1} - 1$. Il y a donc 2^k éliminations lors du premier tour, ce qui laisse $2^{k+1} - 2^k = 2^k$ enfants en lice. On recommence ensuite les éliminations en comptant à partir de l'enfant numéro 0. Ainsi, par hypothèse de récurrence, l'enfant qui deviendra capitaine est celui dont le numéro est 0.

Question 2.b – On écrit n sous la forme $n = 2^k + \ell$ où $0 \leq \ell < 2^k$. Les numéros des ℓ premiers enfants éliminés sont $1, 3, \dots, 2\ell - 1$. Après ces éliminations, il reste 2^k enfants et on commence à compter à partir de l'enfant numéro 2ℓ . Remarquez que 2ℓ est un numéro valide car $2\ell = \ell + \ell < 2^k + \ell = n$. D'après la question précédente, le capitaine sera l'enfant dont le numéro est 2ℓ .

On nous demande d'utiliser l'écriture en base 2 de n .

- L'écriture en base 2 de ℓ est l'écriture en base 2 de n où le bit de poids fort (qui vaut 1) a été supprimé.
- L'écriture en base 2 de 2ℓ est l'écriture en base 2 de ℓ où un 0 a été ajouté à droite.

En conclusion, pour obtenir l'écriture en base 2 du numéro du capitaine, on écrit n en base 2, on supprime le un qui se trouve à gauche et on ajoute un zéro à droite.